

### Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

**Wavre, Rolin:** Is there a crisis in mathematics? With reference to the notion of existence and a doubtful application of the law of excluded mean. *Amer. Math. Monthly* 41, 488—499 (1934).

**Skolem, Th.:** Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen. *Fundam. Math.* 23, 150—161 (1934).

Die Arbeit stimmt hinsichtlich des Resultates mit der in *Norsk Mat. Forenings Skr.*, II. s. Nr 1/12, 73—82 (1933) (vgl. dies. Zbl. 7, 193) vom gleichen Verf. erschienenen überein, gibt bloß einen etwas vereinfachten Beweis und die folgende Formulierung des Ergebnisses: Endlich oder abzählbar viele Aussagen mit lauter Individuenvariablen, die für eine Reihe vom Typus  $\omega$  gelten, können diese Reihe nicht von gewissen Reihen von höherem Ordnungstypus unterscheiden. Daß dies auch richtig bleibt, wenn höhere Variable (für Mengen oder Satzfunktionen) eingeführt und im Sinne der axiomatischen Mengenlehre interpretiert werden, wird ohne Beweis behauptet.

*K. Gödel (Wien).*

**Huntington, Edward V.:** Independent postulates related to C. I. Lewis's theory of strict implication. *Mind* 43, 181—198 (1934).

Verf. stellt ein aus 13 unabhängigen Postulaten bestehendes Axiomensystem mit folgenden Grundbegriffen auf:  $K$  (Klasse der Sätze),  $Q$  (Klasse der falschen Sätze),  $D$  (Klasse der unmöglichen Sätze),  $a \times b$  (Konjunktion),  $a'$  (Negation),  $a = b$  (Gleichheit), wobei  $\times$  und  $'$  als Operationen aufzufassen sind, die aus Elementen von  $K$  wieder Elemente von  $K$  erzeugen. Sätze der Form  $a \in D$  sind inhaltliche Aussagen (nicht Elemente von  $K$ ). Daher kann der axiomatische Unmöglichkeitbegriff  $D$  nicht iteriert angewendet werden, worin der Hauptunterschied gegenüber dem Lewisschen System liegt. Für Aussagen der Form  $a \in Q$ ,  $a \in D$  und die aus solchen mittels Konjunktion und Negation aufgebauten definiert Verf. einen inhaltlichen Unmöglichkeitbegriff [unmöglich ist, was auf einen Widerspruch führt] und zeigt, daß die Lewisschen Axiome aus seinen folgen, wenn man in ihnen die Unmöglichkeitszeichen erster Stufe durch seinen axiomatischen und die zweiter Stufe durch seinen inhaltlichen Unmöglichkeitbegriff ersetzt. Im selben Sinn folgen die Axiome des Verf. aus den Lewisschen, woraus aber noch nicht geschlossen werden kann, daß die beiden Systeme auch in ihren Folgerungen übereinstimmen, da ja für die Unmöglichkeitszeichen dritter und höherer Stufe gar keine Übersetzung vorliegt.

*K. Gödel (Wien).*

**Huntington, E. V.:** The relation between Lewis's strict implication and Boolean algebra. *Bull. Amer. Math. Soc.* 40, 729—735 (1934).

Der Autor zeigt, daß die strict implication des I. C. Lewisschen Formalismus (Lewis and Langford, *Symbolic Logic*, 1932) „in Wirklichkeit äquivalent“ (substantially equivalent) der subsumption der gewöhnlichen Booleschen Algebra ist. Der Lewissche Formalismus ist eine Boolesche Algebra im Sinne des Autors, da er das vierte Huntingtonsche Axiomensystem für die Boolesche Algebra (*Trans. Amer. Math. Soc.* 35, 280; s. auch dies Zbl. 6, 242) erfüllt. Der Autor beweist nun: Wenn  $p < q$  asserted, so  $p = pq$  und umgekehrt ( $<$  strict implication; = asserted equivalence). In einer Booleschen Algebra wird gerade die subsumption  $p < q$  durch  $p = pq$  definiert. Die strict implication und die impossibility  $\infty \diamond$  des Lewisschen Formalismus werden für simultan „weitgehend überflüssig“ erklärt, da neben der genannten gegenseitigen Abhängigkeit auch die von  $\infty \diamond p$  asserted und  $p = p \infty p$  gilt.

*Arnold Schmidt (Göttingen).*



**Tudeberg, Arnold:** Über die Beweisbarkeit einiger Anordnungsaussagen in geometrischen Axiomensystemen. Acta et Comment. Univ. Tartu A 26, Nr 6, 1—24 (1934).

Das eine der beiden Axiome (Ax. A), welche Nuut (Acta et Comment. Univ. Tartu A 23, Nr 4) zur Vereinfachung des Sarvschen Axiomensystems für die Zwischenrelation einführt, zerfällt, wie der Ref. in diesem Zbl. 6, 318 bemerkte, in 36 Axiome, deren gegenseitige Unabhängigkeit noch dahinstand. Tudeberg zeigt nun, daß aus 5 dieser engeren Axiome (und den vorangehenden Axiomen) die übrigen 31 folgen. Bei Hinzunahme der nichtlinearen Zwischenaxiome wird das andere Nuutsche Axiom (Ax. B) ganz beweisbar. Der Verf. bringt noch weitere Reduktionen des Sarvschen Systems. Abschließend wird ein Axiomensystem für die Zwischenrelation vorgeschlagen, das „kürzer“ nicht nur als dasjenige von Sarv, sondern auch als das von Veblen sei, wobei allerdings auf Unabhängigkeit zugunsten einer „bequemeren“ Verwendbarkeit Verzicht geleistet wird.

Arnold Schmidt (Göttingen).

**Foradori, Ernst:** Das endliche Maß. (Zur Grundlegung einer allgemeinen Teiltheorie. III.) Mh. Math. Phys. 41, 133—173 (1934).

Die vom Verf. in Mh. Math. Phys. 40 (dies. Zbl. 7, 99) gegebene Verallgemeinerung des (topologischen) Stetigkeitsbegriffs geht nicht mehr auf „letzte Elemente“, die nichts anderes mehr enthalten, (Punkte), zurück. Unter Benutzung dort verwendeter Begriffsbildungen wird nun eine Verallgemeinerung des Maßbegriffs durchgeführt. In einem Bereich  $B$ , in dem die Relation „Teilein“ definiert ist, sei ein „Gerüst“ (s. d. o. zit. Referat) gegeben. Ein Teilbereich  $Z$  von  $B$  heißt Zerlegung (und seine Elemente  $z$  Zerlegungsteile), wenn folgendes gilt: Ein Element von  $B$  und ein  $z$ , die ein gemeinsames Element enthalten, besitzen einen Durchschnitt (vgl. Mh. Math. Phys. 39; dies. Zbl. 5, 338); jedes Element von  $B$  ist Vereinigung seiner Durchschnitte mit den  $z$ ; die Vereinigung beliebiger  $z$  existiert; keine zwei  $z$  haben ein „inneres“ Element gemeinsam (zur Def. des inneren Elementes ist das Gerüst herangezogen). Als Gitter wird nun eine (endl. oder abzählbar unendl.) Folge von Zerlegungen  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$  bezeichnet, deren jede eine Unterzerlegung der vorangehenden ist. Besitzt in einem Gitter jede Schachtelung (s. dies. Zbl. 7, 99) von Zerlegungsteilen einen Durchschnitt, so ist das Gitter zugleich Gerüst. Ein solches „Gerüstgitter“ wird nun der Verallgemeinerung des Maßbegriffs zugrunde gelegt: Jeder Zerlegungsteil von  $Z_1$  habe das Maß  $\underline{1}$ ; ist einem Zerlegungsteil von  $Z_n$  das Maß  $\underline{p}$  schon zuerteilt und enthält er  $q$  Zerlegungsteile von  $Z_{n+1}$ , so habe jeder von diesen das Maß  $\underline{p:q}$ ; eine Vereinigung endlich vieler Zerlegungsteile habe als Maß  $\overline{m}$  die Summe ihrer Maße. Von diesen speziellen Definitionen ausgehend lassen sich nunmehr in mehreren Schritten für eine umfassende Klasse von Elementen (sie unterliegen nur einer bestimmten Endlichkeitsbedingung) das endliche äußere und innere Maß durch Limesbildung definieren. Wie üblich heißt dann ein Element meßbar, wenn äußeres und inneres Maß übereinstimmen — Eine Reihe grundlegender, teils allgemeiner, teils auf Punktmengen bezüglicher Sätze über das endliche Maß wird hergeleitet; und es werden zwei an das Gitter eines euklidischen Raumes  $R_n$  zu stellende notwendige und im Falle  $R_2$  auch hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß das auf dieses Gitter bezogene Maß (bei trivialer Interpretation des Teileins) mit dem Lebesgueschen Maß übereinstimmt. (Der Unabhängigkeitsbeweis für die zweite Bedingung ist nicht in Ordnung; doch teilte mir der Autor mit, daß er einen korrekten Beweis in einer späteren Arbeit veröffentlichten werde.) Abschließend wird das Verhältnis zur Carathéodoryschen Maßtheorie erörtert.

Arnold Schmidt (Göttingen).

**Foradori, Ernst:** Zur Arithmetik und ihrer Anwendung auf die Quantenphysik. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 44, 76—87 (1934).

Mit Hilfe des Zerlegungsbegriffs (s. vorst. Referat) sucht der Autor auch die elementaren Rechenoperationen „teiltheoretisch“ zu verallgemeinern. Zwei Vereinigungen von Zerlegungsteilen („Komplexe“) haben die gleiche Zahl, wenn sich ihre Zerlegungsteile umkehrbar eindeutig einander zuordnen lassen. Die Vereinigung zweier zueinander



fremder Komplexe mit den Zahlen  $p, q$  erhält die Zahl  $p + q$ . Die so verallgemeinerte Addition ganzer Zahlen (auf die sich die vorliegende Arbeit beschränkt; die Multiplikation sowie der Übergang zu gebrochenen und irrationalen Zahlen werden nur kurz gestreift) ist im allgemeinen weder kommutativ noch assoziativ noch eindeutig. — Die Beziehung zur Quantenphysik wird vom Verf. in folgender Weise hergestellt: 1. wird das „Teilein“ (und damit die „Vereinigung“) für Strecken einer Geraden auf Grund der Annahme interpretiert, ein Streckenendpunkt sei nur bis auf ein Intervall  $\Delta$  bestimmt; 2. wird  $\Delta$  als untere Schranke für die Zerlegungsteile angenommen. In der aus diesen beiden Annahmen fließenden teiltheoretischen Streckenaddition nimmt die Summe zweier Einheitsstrecken fünf (bzw. neun) Werte an; die Analogie dieses Ergebnisses zur Quantenphysik ist nicht recht ersichtlich. *Arnold Schmidt* (Göttingen).

**Skramlik, Emil v.: Die Grundlagen der haptischen Geometrie.** Naturwiss. 22, 601—608 u. 623—627 (1934).

Für die Beurteilung räumlicher Verhältnisse in unserer Umwelt kommt das Gesicht und das Gestalt in Frage. In der Feststellung der geometrischen Eigenschaften stimmen diese beiden Sinneswerkzeuge jedoch durchaus nicht immer überein. Die Bewegungsbahn der Fingerspitzen bei Inanspruchnahme eines einzelnen Gelenkes erscheint als gerade Linie. Haptisch ist also die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten bei Betätigung eines Gelenkes ein Kreisbogen — von hier aus glaubt Verf. eine Verbindung mit der nichteuklidischen Geometrie herstellen zu können —; bei Betätigung mehrerer Gelenke geben die zeitlichen Verhältnisse den Ausschlag, und es existieren mehrere kürzeste Linien. Die Beurteilung von Maßverhältnissen ist von der Lage der Vergleichsgegenstände im Raum abhängig. Insbesondere wird ein Raumpunkt nach optischer Aufnahme beim haptischen Aufzeigen vom Körper entfernt und in der Vertikalrichtung gehoben, nach haptischer Aufnahme bei optischer Aufweisung herangerückt und gesenkt. Auch die Einteilung des Raumes in rechts und links, vorn und hinten, oben und unten ist auf Grund optischer und haptischer Wahrnehmungen verschieden.

*K. Reidemeister* (Marburg, Lahn).

**Neurath, Otto: Radikaler Physikalismus und „Wirkliche Welt“.** Erkenntnis 4, 346—362 (1934).

## Algebra und Zahlentheorie.

**Popoviciu, Tiberiu: Sur un théorème de Laguerre.** Bul. Soc. şti. Cluj 8, 1—4 (1934).

Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  reelle Zahlen und  $S_0, S_1, S_2, \dots$  die durch

$$\frac{1}{(1-x_1z)(1-x_2z)\dots(1-x_nz)} = S_0 + S_1z + S_2z^2 + \dots$$

definierten symmetrischen Funktionen der  $x_v$ . Ferner sei mit ganzen nichtnegativen  $p$  und  $k$  sowie reellen  $a_0, a_1, \dots, a_{2p}$

$$F(z; x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{2p} a_i S_{k+i} z^i.$$

Es wird bewiesen: Ist  $F(z; 1, \dots, 1)$  für alle reellen  $z$  nicht negativ, so ist für alle reellen  $z$

$$F(z; x_1, \dots, x_n) > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{bei geradem } k \text{ für beliebige } x_1, \dots, x_n, \text{ die nicht alle gleich sind,} \\ \text{bei ungeradem } k \text{ für beliebige nichtnegative } x_1, \dots, x_n, \text{ die nicht} \\ \text{alle gleich sind.} \end{array} \right.$$

Der Beweis beruht auf folgendem: Ist die  $(n-1)$ -te Ableitung eines reellen Polynoms  $\varphi(x)$  für alle reellen  $x$  nicht negativ, so ist  $\varphi(x)$  „konvex von  $(n-2)$ -ter Ordnung“, d. h. sämtliche Differenzenquotienten  $(n-1)$ -ter Ordnung  $[x_1, \dots, x_n; \varphi(x)]$  sind positiv, falls nicht alle  $x_v$  einander gleich sind (vgl. dazu dies. Zbl. 9, 59). Der Spezialfall  $a_0 = \dots = a_{2p} = 1, k = 0$  hängt mit dem Satz von Laguerre (Œuvres 1, 111)

zusammen, daß (bei reellen  $x_v$ ) die Polynome  $\sum_{i=0}^{2p} S_i z^i$  stets positiv sind. Aus dem Spezialfall  $x_1 = \dots = x_n = 1$  hiervon und aus dem obigen Satz wird allgemeiner gefolgert, daß  $\sum_{i=0}^{2p} S_{k+i} z^i$  unter den genannten Einschränkungen für die  $x_v$  positiv ist. Eine andere

Spezialisierung führt auf die Ungleichungen

$$\sigma_{k+1}^2 \leq \sigma_k \sigma_{k+2} \text{ für beliebige } x_1, \dots, x_n$$

$$\sigma_1 \leq \sqrt{\sigma_2} \leq \sqrt[3]{\sigma_3} \leq \dots \text{ für nichtnegative } x_1, \dots, x_n \quad S_v = \frac{S_v}{\binom{v+n-1}{n-1}}.$$

Ein Gleichheitszeichen steht nur, wenn alle  $x_v$  einander gleich sind. Diese Ungleichungen sind, wie Ref. bemerkt, auch von I. Schur gefunden worden (vgl. Hardy, Littlewood, Pólya: *Inequalities*, S. 164. Cambridge 1934). W. Fenchel (Kopenhagen).

**Montel, Paul:** Sur quelques limitations pour les modules des zéros des polynomes. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 651—653 (1934).

Ohne Beweis werden die folgenden Sätze ausgesprochen: Sind

$$M_p = \text{Max}(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{p-1}|), \quad q = n - p + 1,$$

$$N_p = \text{Max}(\sqrt[p]{|a_0|}, \sqrt[p-1]{|a_1|}, \dots, \sqrt[q]{|a_{p-1}|}),$$

so hat das Polynom  $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_n x^n$  im Falle  $a_n = 1$  mindestens  $p$  Nullstellen in beiden Kreisen  $|x| = 1 + \sqrt[p]{M_p}$  und  $|x| = 2 N_p$ . Ist aber  $a_p = 1$  bzw.  $a_{p+h} = 1$  ( $0 < h < n - p$ ), so hat das Polynom  $P(x)$  mindestens  $p$  Nullstellen im Kreise  $|x| = \varrho(M_p) = \frac{1}{1 - \sqrt[p]{\frac{M_p}{1+M_p}}}$  bzw.  $|x| = \text{Max}[\varrho(1), \varrho(M_p)]$ . Sz. Nagy (Szeged).

**Hille, Einar:** Über die Nullstellen der Hermiteischen Polynome. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **44**, 162—165 (1934).

Verf. gibt einen neuen Beweis für die neuerdings im Anschluß an ein Problem von Wiman [Math. Ann. **104**, 169 (1931)]; dies Zbl. **1**, 22] öfters diskutierte Tatsache, daß die Minimalentfernung  $\delta(n)$  zweier benachbarter Nullstellen des  $n$ -ten Hermiteischen Polynoms  $e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}$  von der Größenordnung  $n^{-\frac{1}{2}}$  ist. Sein Beweis beruht auf einer Folgerung des Hauptsatzes von Sturm, die selbst bei Sturm vorkommt und bisher wenig Beachtung fand; sie besagt die monotone Änderung der Nullstellenabstände der Lösungen von linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung unter einfachen Voraussetzungen über die Koeffizienten. Sie liefert im vorliegenden Falle sehr schnell das Resultat

$$\delta(n) = \frac{\pi}{\sqrt{2n+1}} \left\{ 1 + \frac{\vartheta \pi^2}{(2n+1)^2} \right\}, \text{ wobei } \begin{matrix} 0 < \vartheta < 2, & n \text{ ungerade,} \\ 0 < \vartheta < \frac{1}{2}, & n \text{ gerade.} \end{matrix}$$

Auch für die anderen Nullstellendifferenzen werden Abschätzungen gegeben.

Szegö (St. Louis, Mo.).

**Kneser, Hellmuth:** Das Maximum des Produkts zweier Polynome. S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1934**, 426—431.

G. Aumanns Satz: „Sind  $A(z)$ ,  $B(z)$  Polynome  $m$ -ten bzw.  $n$ -ten Grades und bezeichnen  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  bzw. das Maximum von  $|A(z)|$ ,  $|B(z)|$ ,  $|A(z)B(z)|$  auf einem Kontinuum, so liegt  $M_3/M_1M_2$  oberhalb einer positiven, nur von  $m$  und  $n$  abhängigen (dagegen vom Kontinuum unabhängigen) Schranke“ (S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1933**, 924; dies. Zbl. **8**, 253) wird vom Verf. auf eine neue Weise bewiesen und durch Berechnung des Minimums des fraglichen Quotienten (bei festem  $m$  und  $n$ ) wesentlich verschärft. Er findet für das Minimum:

$$\prod_{v=1}^m \text{tg}^2 \frac{2v-1}{4(m+n)} \pi;$$

es wird erreicht, wenn  $A(z)B(z)$  das  $(m+n)$ -te Tschebyscheffsche Polynom  $\cos(m+n)\varphi$ ,  $\cos \varphi = z$ , ist, dessen  $m$  größte Nullstellen mit denen von  $A(z)$  übereinstimmen.

G. Szegö (St. Louis, Mo.).

**Racah, G.:** Numero dei tensori isotropi ed emisotropi in spazi a più dimensioni. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **20**, 109—112 (1934).

Die Anzahl der linear-unabhängigen „isotropen Tensoren“ des euklidischen  $S_r$ , deren Komponenten bei Drehungen einzeln invariant bleiben, hatte der Verf. in einer



früheren Note [I., Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 135 (1933); Zbl. 7, 367] mit Hilfe von Gruppencharakteren berechnet. Hier wird dieselbe Anzahl neu berechnet auf Grund der Tatsache, daß alle diese Tensoren sich linear zusammensetzen aus Produkten von Faktoren  $\delta_{ik}$  und  $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_r}$ , wo  $\delta_{ik}$  das Kronecker-Symbol und  $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_r}$  der Koeffizient von  $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_r^{i_r}$  in der Entwicklung der Determinante  $(x_1 x_2 \dots x_r)$  ist.

van der Waerden (Leipzig).

**Zyliński, E.: Sur quelques espaces linéaires.** Bull. int. Acad. Polon. Sci. A Nr 5/7, 208—211 (1934).

Beweise des Trägheitssatzes quadratischer Formen und des Sylvesterschen Nullitätssatzes. Die größtenteils bekannten Beweise enthalten bedauerliche Druckfehler.

Ulm (Göttingen).

**Gurevič, G.: Sur les trivecteurs dans l'espace à sept dimensions.** C. R. Acad. Sci. URSS. 3, 564—566 u. franz. Text 567—569 (1934) [Russisch].

M. Schouten a donné une classification complète des trivecteurs de l'espace à 7 dimensions [Rend. Circ. mat. Palermo 55, 137 (1931); ce Zbl. 1, 354]. Dans ce travail l'auteur donne les caractéristiques invariants  $(r, \varrho_1, \varrho_2)$  pour tous les dix types.  $r$  est égal au rang du trivecteur  $w_{ijk}$ .  $\varrho_1$  resp.  $\varrho_2$  indique le nombre des vecteurs linéairement indépendants parmi les vecteurs du système  $w_{[jk} w_{lmn]}$  resp.  $w_{i[jk} w_{lmn} w_{abc]}$  (les indices soulignés sont fixés). Ces caractéristiques ont quelques propriétés très remarquables, p. e. la somme  $r + \varrho_1 + \varrho_2$  est pour tous les types divisible par 3. L'auteur obtient encore les caractéristiques invariants sous une forme purement algébrique.

J. Haantjes (Delft).

**Carlitz, Leonard: On polynomials in a Galois field: Some formulae involving divisor functions.** Proc. London Math. Soc., II. s. 38, 116—124 (1934).

$\tau(F)$  sei die Anzahl der normierten Teiler eines Polynoms  $F = F(x)$  mit Koeffizienten aus  $GF(p^n)$ . Dann wird die Summe

$$\sum \tau(A) \tau(B)$$

erstreckt über alle Zerlegungen  $F = A + B$  eines gegebenen Polynoms  $F$  in zwei Polynome genau gleichen Grades berechnet. Das Ergebnis lautet, wenn  $k$  der Grad von  $F$  ist,

$$\sum_{2m > k} |M| \{ (2m - k + 1)^2 - (2m - k - 1)^2 p^{-n} \} + \sum_{2m = k} |M|,$$

wo die Summen sich über alle normierten Teiler  $M$  von  $F$  erstrecken, deren Grade  $m$  den angegebenen Bedingungen ( $2m > k$  bzw.  $2m = k$ ) genügen, und wo  $|M| = p^{nm}$  gesetzt wurde. Ähnliche Formeln gelten für  $\sum \tau^{(r)}(A) \tau^{(s)}(B)$ , für  $\sum \sigma_r(A) \sigma_s(B)$  und für  $\sum \varrho_s(A) \varrho_t(B)$ , wo  $\tau^{(r)}$  die Anzahl der normierten Teiler vom Grade  $r$  ist, und wo

$$\sigma_r(F) = \sum_{M|F} |M|^r, \quad \varrho_s(F) = \sum_{2m > k} |M|^s (1 - p^{-ns}) + \sum_{2m = k} |M|^s$$

ist. Diese beiden Definitionsformeln sind im Text gedruckt, ebenso die Produktformel für  $\varrho_s$ , die so heißen soll:

$$\sum_{\alpha F = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_r A_r} \varrho_{s_1}(A_1) \dots \varrho_{s_r}(A_r) = \varrho_s(F), \quad s = s_1 + \dots + s_r + r - 1.$$

(Grade von  $A_1, \dots, A_r$  = Grad von  $F$  = gerade Zahl.) Für den Beweis dieser Formel siehe L. Carlitz, Trans. Amer. Math. Soc. 35, 397—410 (dies. Zbl. 6, 389).

van der Waerden (Leipzig).

**Jacobsthal, Ernst: Der Minkowskische Linearformensatz.** S.-B. Berlin. math. Ges. 33, 62—64 (1934).

Die Beweisaneinanderordnung unterscheidet sich von einer vom Verf. im Jahre 1923 [S.-B. Berlin. math. Ges. 22, 33—37 (1923)] gegebenen durch eine kleine Abänderung, die aber eine erhebliche Abkürzung gestattet. Verf. beschränkt sich ebenso wie kürzlich R. Rado [J. London Math. Soc. 9, 164—165 (1934); dies. Zbl. 9, 245] auf den Fall einer ganzzahligen Koeffizientenmatrix der Linearformen. Dem Ref. scheint der Beweis von Rado kürzer.

Bessel-Hagen (Bonn).

**Bell, E. T.: Exponential numbers.** Amer. Math. Monthly **41**, 411—419 (1934).

Ist  $f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + \dots$  und

$$e^{-f(0)} e^{f(x)} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2/2! + \dots + \alpha_n x^n/n! + \dots,$$

so heißen die Zahlen  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$  die mit  $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$  assoziierten Exponentialzahlen. Zur kürzeren Schreibweise wird die Symbolik („umbral notation“)  $c^n = c_n$  usw. angewendet. Setzt man noch  $c_n = a_n/n!$ , so hat man symbolisch  $f(x) = e^{ax}$ ,  $e^{-a_0} e^{ax} = e^{ax}$  oder  $ae^{(a+\alpha)x} = \alpha e^{ax}$ ; hieraus durch Koeffizientenvergleichung  $a(a+\alpha)^n = \alpha^{n+1}$  ( $n \geq 0$ ),  $\alpha_0 = 1$  oder in gewöhnlicher Schreibweise  $\binom{n}{0} a_1 \alpha_n + \binom{n}{1} a_2 \alpha_{n-1} + \dots + \binom{n}{n} a_{n+1} \alpha_0 = \alpha_{n+1}$ . Sind die  $a$  ganze Zahlen, so sind es auch die  $\alpha$ . Indem man nun gewisse zahlentheoretische Eigenschaften der Binomialkoeffizienten verwendet, ergeben sich zahlentheoretische Aussagen über die Exponentialzahlen. Ähnlich kann man bei Funktionen verfahren, die nur die geraden oder nur die ungeraden Potenzen von  $x$  enthalten; statt der Exponentialfunktion treten dann die Hyperbelfunktionen ein. — Als besonders einfache Beispiele von Exponentialzahlen werden die Entwicklungskoeffizienten von  $e^{-1}e^{ex} = e^{ex}$ , d. s.  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 2, \varepsilon_3 = 5, \varepsilon_4 = 15, \varepsilon_5 = 52, \dots$  ferner die von  $e^{\cos x} - 1$  und  $e^{\sin x}$ , angeführt. — Die zahlentheoretischen Eigenschaften können als Probe für die Entwicklungskoeffizienten dienen; dies war auch die Veranlassung für die Untersuchungen des Verf.

L. Schrutka (Wien).

**Thébault, V.: Sur les carrés parfaits.** Mathesis **48**, Suppl., 1—22 (1934).

Tafel: a) aller Gruppen von  $n$  Ziffern, mit welchen eine Quadratzahl endigen kann, für  $n = 1, 2, 3, 4$ ; b) aller linearen Formen der Zahlen, deren Quadrate mit einer Gruppe aus a) endigen,  $n = 1, 2, 3$ ; c) aller Quadratzahlen, die aus  $n$  ungleichen Ziffern bestehen,  $n = 1, 2, \dots, 10$ . Zahlenpaare wie 13 und 31 mit Quadratzahlen wie 169 und 961.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

**Kuschke, C. G. P.: Magic circles.** Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 709—710 (1934).

In jedem der  $n^2 + 1$  Schnittpunkte von  $n$  konzentrischen Kreisen und  $n$  Strahlen wird je eine der  $n^2 + 1$  ersten ganzen Zahlen gesetzt, so daß die Zahlen eines jeden Kreises mit seinem Mittelpunkt und die Zahlen eines jeden Strahles dieselbe Summe ergeben. Ausgenommen werden solche Systeme, die sich aus magischen Quadraten ergeben und die Zahl 1 oder  $n^2 + 1$  im Zentrum haben. Bestimmung der Anzahl solcher Systeme für  $n = 2, 3, 4$ .

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

**Dickson, L. E.: Two-fold generalizations of Cauchy's lemma.** Amer. J. Math. **56**, 513—528 (1934).

Es seien  $s$  eine natürliche Zahl,  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_s$  positive ganze Zahlen und  $k$  eine beliebige ganze Zahl. Untersucht werden die Bedingungen für die Zahlen  $a, b$ , unter denen das Gleichungspaar

$$\sum_{i=1}^s c_i x_i^2 = a, \quad \sum_{i=1}^s c_i x_i = b$$

ganzzahlige Lösungen besitzt, bei denen  $x_i > -k$  für  $i = 1, 2, 3, \dots, s$ . Verf. erledigt zunächst durch sehr mühsame Einzeldiskussion 11 Koeffizientensysteme  $c_1, c_2, \dots$  mit  $s = 4$  und 4 Koeffizientensysteme mit  $s = 5$ . Sodann gibt er noch hinreichende Bedingungen für die Koeffizientensysteme, die aus den letzten 4 folgen, indem weitere Koeffizienten mit dem Wert 1 angehängt werden, jedoch höchstens so viele, daß  $c_1 + c_2 + \dots + c_s \leq 8$  bleibt.

Bessel-Hagen (Bonn).

**Chowla, S.: Heilbronn's class-number theorem.** J. Indian Math. Soc., N. s. **1**, 66—68 (1934).

In Heilbronn's proof (see this Zbl. **9**, 296) of the Gauss class-number conjecture, he considers any  $L$ -function  $L_0(s) = \sum \chi(n) n^{-s}$ , and the related function  $L_2(s) = \sum \chi(n)(d|n) n^{-s}$ , and shows that if  $h(d)$  is fixed and  $d \rightarrow -\infty$ ,  $|L_0(s) L_2(s)|$ , eventually exceeds a positive number, whence  $L_0(s)$  cannot have a zero with  $\Re s > \frac{1}{2}$ . Chowla allows the modulus  $m$  of the character  $\chi$  to increase by adjunction of new fac-



tors, as  $d \rightarrow -\infty$ , and thereby establishes more simply a positive lower limit to the principal term  $|\sum \chi(a) a^{-e}|$  of the product  $L_0(s) L_2(s)$ ; avoiding the use of ideals. However, he treats only  $\Re s > \frac{3}{4}$ , giving an incomplete reference to Hecke for the rest.

G. Pall (Montreal).

**Webber, G. Cuthbert:** Waring's problem for cubic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 493—510 (1934).

See this Zbl. **8**, 297, for review of Dickson's paper of which this is an extension, with  $\varepsilon$  not necessarily prime to 3, and the square term possibly present. It is shown also that every integer is a sum of fifteen values of  $x^3 + 3(x^2 - x)$  for integers  $x \geq 0$  (41 requires fifteen values).

G. Pall (Montreal).

**Košliakov, N.:** On some summation formulae connected with the theory of numbers. C. R. Acad. Sci. URSS **3**, 401—403 u. engl. Zusammenfassung 404 (1934) [Russisch].

Verf. beweist: Es sei  $d(n)$  die Anzahl der Teiler von  $n$ ,  $\gamma$  die Eulersche Konstante,

$$\sigma(z) = -\gamma - \frac{1}{2} \log z - \frac{1}{4\pi z} + \frac{z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{z^2 + n^2},$$

dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) d(n) = \frac{1}{4} f(0) + \int_0^{\infty} (2\gamma + \log x) f(x) dx + i \int_0^{\infty} (f(yi) - f(-yi)) \sigma(y) dy,$$

wenn  $f(z)$  eine für  $\Re z \geq 0$  reguläre Funktion ist, die dort beschränkt ist und bei  $\Re z \rightarrow \infty$  hinreichend rasch gegen 0 strebt.

Hans Heilbronn (Bristol).

## Mengenlehre und reelle Funktionen.

● **Fréchet, Maurice:** L'arithmétique de l'infini. (Actualités scient. et industr. Nr. 144. Exposés d'analyse générale. Publiés par Maurice Fréchet. I.) Paris: Hermann & Cie. 1934. 41 S. Frs. 10.—

After a preface introducing a series of expositions on topics in General Analysis, the author presents a short discussion of the elements of the theory of transfinite cardinal and ordinal numbers and a few pages on the elements of point sets, theory of measure and summability. General Analysis is defined to be the study of transformations of an arbitrary element of any kind into an element of any other kind. This includes the General Analysis of E. H. Moore (A Form of General Analysis, The New Haven Mathematical Colloquium, Yale University Press, New Haven, 1910) which is here called functional analysis. The preface contains a description of the character and significance of the extension of topology to abstract spaces, of functional analysis in vectorial spaces, and of an application of the latter theory to mechanics by Destouches (this Zbl. **9**, 380), which is to be the subject of the fourth volume of the series.

E. W. Chittenden (Jowa).

**Sierpiński, W.:** Sur la séparabilité multiple des ensembles mesurables B. Fundam. Math. **23**, 292—303 (1934).

Es sei  $K$  eine Menge,  $\Phi$  ein System von Untermengen der Menge  $K$ ,  $\bar{\Phi}$  das System aller Komplementärmengen zu den Mengen aus  $\Phi$  und  $\Phi^*$  der Durchschnitt von  $\Phi$  und  $\bar{\Phi}$ . Das System  $\Phi$  genügt dem ersten Lusinschen Prinzip, falls für je zwei disjunkte Mengen  $E_1$  und  $E_2$  aus  $\Phi$  zwei solche disjunkte Mengen  $H_1$  und  $H_2$  aus  $\Phi^*$  existieren, daß  $E_1 \subset H_1$ ,  $E_2 \subset H_2$  ist. Das System  $\Phi$  genügt dem zweiten Lusinschen Prinzip, wenn es für je zwei beliebige Mengen  $E_1$  und  $E_2$  aus  $\Phi$  zwei solche disjunkte Mengen  $H_1$  und  $H_2$  aus  $\bar{\Phi}$  gibt, daß  $E_1 - E_2 \subset H_1$ ,  $E_2 - E_1 \subset H_2$  ist. Das erste Lusinsche Prinzip wurde neuerdings folgendermaßen verallgemeinert: Das System  $\Phi$  besitzt die Novikoffsche (bzw. Liapounoffsche) Eigenschaft, falls für jedes endliche (bzw. abzählbare) System von Mengen  $E_n$  aus  $\Phi$  mit leerem Durchschnitt ein solches endliches (bzw. abzählbares) System von Mengen  $H_n$  aus  $\Phi^*$  existiert, daß der Durchschnitt aller  $H_n$  leer ist und für jedes  $n$  die Inklusion  $E_n \subset H_n$  gilt. Es wurde von Lusin, Novikoff und Liapounoff bewiesen [vgl. C. R. Acad. Sci. URSS **2**, 273—284 (1934); dies. Zbl. **9**, 104/105], daß das System aller analytischen Mengen die vier oben erwähnten Eigenschaften besitzt. — Es sei jetzt  $\Phi_1$  ein additives



System von Untermengen der Menge  $K$  und  $\Phi$  das System aller endlichen oder abzählbaren Summen von Mengen aus  $\Phi_1$  und  $\bar{\Phi}_1$ . Das Hauptergebnis des Verf. ist das folgende: Das System  $\Phi$  besitzt in diesem Falle die vier oben angegebenen Eigenschaften. Insbesondere ist dieses Ergebnis auf alle additive Klassen  $\Phi_\alpha$  ( $1 < \alpha < \Omega$ ) der Lebesgueschen Klassifikation von Borelschen Mengen anwendbar.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Sierpiński, W.: Sur le produit combinatoire de deux ensembles jouissant de la propriété C. (Solution d'un problème de M. Szpilrajn.) Fundam. Math. 24, 48—50 (1934).

Die Eigenschaft  $C$  eines metrischen Raumes besteht in der Möglichkeit, denselben für jede vorgegebene Zahlenfolge  $\{z_n\}$  mit einer Folge seiner Teilmengen  $\{T_n\}$  vom Durchmesser  $\delta(T_n) \leq z_n$  zu überdecken. Es wird, unter Zugrundelegung der Kontinuumhypothese, die Existenz einer linearen  $C$ -Menge  $L$  nachgewiesen, deren kartesisches Quadrat (d. h. Menge der geordneten Elementepaare aus  $L$ , durch die kartesische Abstandsformel metrisiert) nicht mehr eine  $C$ -Menge ist. Es gibt nämlich unter den sog. Lusinschen Mengen (d. h. deren nirgendsdichte Teilmengen sämtlich höchstens abzählbar sind), die alle, wie bekannt,  $C$ -Mengen sind, lineare Mengen  $L$  von der Beschaffenheit, daß die Differenzen ihrer Elemente die Gesamtheit aller reellen Zahlen bilden. Aber schon die Projektion der (ebenen) Menge  $L^2$  auf die Gerade  $y = -x$  bedeckt diese Gerade vollständig, ist also keine  $C$ -Menge. B. Knaster (Warszawa).

Novikov, P.: Sur quelques systèmes d'ensembles invariants par rapport à l'opération (A). C. R. Acad. Sci. URSS. 3, 557—559 u. franz. Zusammenfassung 560 (1934) [Russisch].

Ist  $\mathfrak{S}$  eine in bezug auf die Hausdorffsche  $A$ -Operation invariante Mengenklasse (d. h., daß die aus den Mengen von  $\mathfrak{S}$  durch  $A$ -Operation hervorgehenden Mengen stets zu  $\mathfrak{S}$  gehören) und  $\varrho$  ein Ring (d. h. eine in bezug auf Addition, Subtraktion und Multiplikation von endlichvielen Mengen invariante Mengenklasse), so kommt es vor, daß  $\varrho \subset \mathfrak{S}$  ist und daß jede Menge von  $\mathfrak{S}$  durch  $A$ -Operation aus den Mengen von  $\varrho$  erzeugbar ist. Dann aber enthält  $\mathfrak{S}$  einen in bezug auf die letzte Eigenschaft saturierten Ring  $\sigma$ , und zwar einen einzigen. Solch ein  $\sigma$  (das ersichtlich  $\varrho$  enthält) ist invariant in bezug auf Addition und Multiplikation von sogar abzählbarvielen Mengen. Verf. beweist folgenden, zum sog. I. Lusinschen Separationsprinzip für analytische und Borelsche Mengen (N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques. Paris 1930. S. 156) analogen Satz: Sind  $M_1$  und  $M_2$  zwei punktfremde Mengen von  $\mathfrak{S}$ , so gibt es zwei punktfremde Mengen  $S_1$  und  $S_2$  von  $\sigma$ , derart, daß  $M_1 \subset S_1$  und  $M_2 \subset S_2$  ist. Sind (analog zum II. Lusinschen Separationsprinzip; ebenda S. 210) die Mengen  $M_1$  und  $M_2$  evtl. nicht punktfremd, so können jedenfalls die Differenzmengen  $M_1 - M_2$  und  $M_2 - M_1$  in zwei punktfremde Mengen  $D_1$  und  $D_2$  eingeschlossen werden, die selbst Differenzmengen von je einer zu  $\mathfrak{S}$  und zu  $\sigma$  gehörenden Mengen sind. Auch ein zum verallgemeinerten II. Separationsprinzip analoger Satz soll für Mengen von  $\mathfrak{S}$  und  $\sigma$  gelten. B. Knaster (Warszawa).

Montgomery, Deane: Properties of plane sets and functions of two variables. Amer. J. Math. 56, 569—586 (1934).

Das bis jetzt über die Lusinsche Sieboperation  $\Gamma_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{R})$  Bekannte („opération du crible“; für den Begriff und Bezeichnungsweise s. dies. Zbl. 3, 153) wird um zahlreiche weitere Ergebnisse vermehrt, und zwar zum Teil unter denselben allgemeinen Voraussetzungen (vgl. dies. Zbl. 4, 204 und 6, 340). Neben den früheren werden die Klassen  $\mathfrak{R}$  von  $F_\alpha$ - und  $O_\alpha$ -Mengen und von den Mengen mit der Baireschen Eigenschaft (unten mit  $BE$  bezeichnet) betrachtet und die Sieboperation u. a. auf folgende Eigenschaften  $\mathfrak{G}$  untersucht: zweite Kategorie von Baire (II), positives ( $>0$ ) bzw. nichtnegatives Maß ( $\geq 0$ ), Dichtheit ( $d$ ), Nirgendsdichtheit ( $Nd$ ) und Zusammenhang ( $Z$ ). Die entsprechenden Werte von  $\Gamma_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{R})$  sind am kürzesten an den Kreuzungsstellen der  $\mathfrak{G}$ -Zeilen mit den  $\mathfrak{R}$ -Spalten der folgenden Tabelle abzulesen.



		Klassen $\mathfrak{K}$					
		$F_\alpha$	$O_\alpha$	$B$	$A$	$CA$	$BE$
Eigenschaften $\mathfrak{E}$	$II$	$= O_{\alpha+1}$	$= O_\alpha$		$\subset CPCA$	$\subset PCA$	$\subset BE$
	$> 0$	$\subset O_{\alpha+1}$	$\subset O_\alpha$		$\subset CPCA$	$\subset PCA$	
	$\equiv 0$	$\subset F_\alpha$					
	$d$				$= A$	$= PCA$	
	$Nd$			$= CA$	$= CA$	$= CPCA$	
	$F_\sigma \cdot G_\delta$			$= CA$	$= CPCA$	$= CPCA$	
	$F_\alpha$			$\subset PCA$	$\subset PCPCA$	$\subset PCPCA$	
	$Z$			$= CA$	$= CPCA$	$= CPCA$	

Außerdem: ist  $K \in B$  (und zwar ein  $F_\alpha$  bzw.  $O_\alpha$ ), so ist folgende Bedingung hinreichend, damit auch  $\Gamma_{\mathfrak{E}}(K) \in B$  (und zwar ein  $O_{\alpha+1}$  bzw.  $O_\alpha$ ) sei: auf jeder vertikalen Geraden der Ebene bilden die Punkte von  $K$  eine Menge entweder von der II. Kategorie oder von positivem Maße. Ist  $K \in A$  und sind die vertikalen Schnitte von  $K$  sämtlich abgeschlossen, so ist auch  $\Gamma_{\mathfrak{E}}(K) \in A$ . Es wird (unter Verwendung eines früheren Ergebnisses des Verf.; s. dies. Zbl. 8, 6) als geeignetste Beweismethode fast ausschließlich das aussagenkalkülsymbolische Abschätzungsverfahren von C. Kuratowski und A. Tarski (dies. Zbl. 3, 105) benutzt. In der zweiten, funktionentheoretischen Hälfte der Arbeit wird eine Sieboperation durch Klassen  $\Phi$  von Funktionen zweier Veränderlichen  $\varphi(x, y)$  eingeführt. Ist nämlich  $\mathfrak{E}$  eine Eigenschaft (Klasse) von Funktionen einer Veränderlichen, so bezeichnet  $\Gamma_{\mathfrak{E}}(\varphi)$  die Menge derjenigen Punkte  $\bar{x}$ , für welche die Funktion  $\psi(y) = \varphi(\bar{x}, y)$  die Eigenschaft  $\mathfrak{E}$  besitzt. Bei  $\Phi$ -Klasse der (auf der Ebene definierten) Baireschen Funktionen  $\varphi(x, y)$  ergibt sich nun  $\Gamma_{\mathfrak{E}}(\Phi) = CA$  bei folgenden Eigenschaften  $\mathfrak{E}$  von Funktionen  $\psi(y)$ : beschränkte Variation, absolute Stetigkeit, punktartige Unstetigkeit, Integrabilität nach Riemann, Angehörigkeit zur I. Klasse von Baire. Unterwegs wird für Bairesche Funktionen  $\varphi(x, y)$  die Meßbarkeit nach Lebesgue von ihren Tonellischen totalen Variationen nach  $x$  und  $y$  gefolgert. Einige andere Teil- und Nebenergebnisse betreffen z. B. als  $\mathfrak{E}$ : die Existenz einer einzigen endlichen Derivierten nach  $y$  in allen bzw. in manchen bzw. in keinem Punkte, und, bei verschiedenen  $\mathfrak{E}$ , die Funktionen  $\varphi$  von der I. Klasse von Baire.

B. Knaster (Warszawa).

Natanson, I.: Note sur la convergence faible des intégrales singulières. C. R. Acad. Sci. URSS 3, 305—307 u. franz. Zusammenfassung 307 (1934) [Russisch].

Die Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \int_a^b g(x) f(t) \Phi_n(t, x) dt dx = \int_a^b g(x) f(x) dx$$

gilt für eine beliebige meßbare beschränkte Funktion  $f(x)$  und jede summierbare Funktion  $g(x)$ , falls der Kern  $\Phi_n(t, x)$  den folgenden zwei Bedingungen genügt:

1.  $\int_a^b |\Phi_n(t, x)| dt$  ist nach  $x$  gleichmäßig beschränkt.
2.  $\int_a^\beta \Phi_n(t, x) dx = \psi_{\alpha, \beta}^{(n)}(x)$

konvergiert als Funktion von  $x$  nach Maß gegen Eins, wenn nur  $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$  ist.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Manià, Basilio: Una proprietà dell'integrale di Lebesgue. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 67, 371—384 (1934).

Etant données deux fonctions quasi-continues et intégrables — Lebesgue dans un intervalle  $(a, b)$  où le produit de ces fonctions est lui-même intégrable, l'a. donne une condition suffisante pour que

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) g^{(m)}(x) dx$$



$g^{(m)}(x)$  étant une fonctions qui prend dans chaque intervalle  $\left(a + k \frac{b-a}{m}, a + (k+1) \frac{b-a}{m}\right)$  comme unique valeur la valeur moyenne de  $g(x)$  dans cet intervalle. Il suffit pour que l'égalité ait lieu que l'une des fonctions  $f(x)$ ,  $g(x)$  soit bornée, ou que  $|f(x)|^\alpha$ ,  $|g(x)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$  soient intégrables ( $\alpha > 1$ ). Ce problème a été rencontré par l'auteur dans des recherches sur le calcul des variations et le problème de Mayer.

E. Blanc (Paris).

## Analysis.

**Mambriani, Antonio:** Sulla derivazione di ordine superiore delle funzioni composte. I. Boll. Un. Mat. Ital. 13, 217—222 (1934).

**Bonferroni, C.:** Sulla validità dei teoremi della media nel Calcolo integrale. Boll. Un. Mat. Ital. 13, 225—229 (1934).

L'A. mostra che ipotesi diverse da quelle ordinariamente formulate consentono di applicare ad un integrale di Riemann i teoremi della media parziale e della media di Bonnet, e, ad un integrale di Stieltjes, il teorema della media. *Autoreferat.*

**Potron:** Sur l'intégrale de différentielle binome. Extrait de: J. École polytechn., II. s. 33, 14 S. (1935).

Tschebyscheff hat bewiesen, daß das Integral eines binomischen Differentials außer in den drei bekannten (in den meisten Lehrbüchern behandelten) Fällen nicht durch elementare Funktionen ausgedrückt werden kann. Hierbei dient ein Satz von Liouville als Hilfsmittel, wonach das Integral einer algebraischen Funktion  $y$ , wenn es durch elementare Funktionen ausdrückbar ist, notwendig die Form

$$R_0(x, y) + \sum a_i \ln R_i(x, y)$$

haben muß, worin die  $a$  Konstante und die  $R$  rationale Funktionen sind. Der Verf. stellt den Beweis neu dar, um einerseits Einwänden, die bei Liouville's Beweis gegen einige Einzelheiten erhoben werden könnten, auszuweichen, andererseits den Beweis von Tschebyscheff abzukürzen. — I. Beweis des Hilfssatzes von Liouville. Die algebraischen Funktionen können als Transzendenten vom Rang 0 angesehen werden. Exponentialfunktionen und Logarithmen algebraischer Funktionen sind die elementaren Transzendenten vom Rang 1. Die allgemeinen Transzendenten vom Rang 1 sind die algebraischen Funktionen von  $x$  und einer Anzahl solcher elementarer Transzendenten vom Rang 1. Ferner sind die elementaren Transzendenten vom Rang  $k$  die Exponentialfunktionen und Logarithmen von Transzendenten vom Rang  $k-1$ , und die allgemeinen Transzendenten vom Rang  $k$  sind entsprechend aufgebaut. Der Rang der Ableitung einer Transzendenten vom Rang  $m$  ist nicht größer als  $m$ . Eine feinere Untersuchung zeigt, daß nur  $m$  oder  $m-1$  als Rang in Betracht kommen kann. Hieraus folgt, daß das Integral einer algebraischen Funktion keinen höheren Rang als 1 haben kann und weiter der Satz von Liouville. — II. Der Beweis des Satzes von Tschebyscheff geht wie bei Tschebyscheff selbst von der Formulierung aus, daß das Integral des binomischen Differentials auf die Gestalt  $\int x^{-p}(x+1)^{-q} dx$  gebracht werden kann, worin  $p$  und  $q$  zwischen 0 und 1 liegen. Setzt man  $p = j/k$ ,  $q = a/b$ ,  $k-j = h$ , so werden die obenerwähnten Fälle durch die Bedingungen  $0 < h < k$ ,  $0 < a < b$ ,  $ak - bh \neq 0$  ausgeschlossen. Nun wird bewiesen, daß ein solches Integral nicht die Gestalt, wie sie der Satz von Liouville angibt, haben kann.

L. Schrutka (Wien).

**Soller, W.:** Stokes's integral theorem: a direct consequence of integrating the conjugate differential dyadic. Math. Gaz. 18, 268—270 (1934).

In this paper is given an outline of a derivation of Stokes' theorem based on the evident relation  $d\mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} + \text{curl } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$  where  $\mathbf{v}$  is any vector and  $\nabla \mathbf{v}$  is the dyadic obtained from it by space differentiation. The argument is not clear since the result of integrating  $\nabla \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$  around a closed curve on a surface is written as  $\nabla \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$  and it



is clear that  $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$  is not a function of position but merely a function of one of the parameters on the surface.

*Murnaghan* (Baltimore).

**Onicescu, O.: Proprietà topologiche delle trasformazioni puntuali dello spazio.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 20, 87—88 (1934).

Conditions (assez restrictives) suffisantes, afin qu'une transformation entre deux espaces réels  $(x, y, z)$ ,  $(X, Y, Z)$  — représentée par les formules:

$$X = f(x, y, z), \quad Y = \varphi(x, y, z), \quad Z = \psi(x, y, z),$$

avec des fonctions  $f, \varphi, \psi$  uniformes et régulières dans tout l'espace réel  $(x, y, z)$  — soit dépourvue de points lacunaires.

*Beniamino Segre* (Bologna).

**Kobayashi, Katsutarô: On some inequalities.** Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 16, 341—344 (1934).

**Izumi, Shin-ichi, Katsutarô Kobayashi and Tatsuo Takahashi: On some inequalities.** Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 16, 345—351 (1934).

Die bekannte Jensensche Ungleichung besagt, daß  $\left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n a_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}$  für nichtnegative  $a_\nu$  als Funktion von  $p$  monoton wächst. Die beiden vorliegenden Arbeiten geben eine Anzahl von ähnlichen, aber komplizierteren, Sätzen, wobei unter anderem unter geeigneten Bedingungen die Monotonie von Funktionen wie  $\left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^p / \sum_{\nu=1}^n a_\nu^{kp}\right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $\left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^k / \sum_{\nu=1}^n a_\nu^{\log \lambda}\right)^{\frac{1}{k}}$  und  $\theta^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^n \theta(\lambda, a_\nu) / \sum_{\nu=1}^n \theta(\kappa \lambda, a_\nu); \lambda\right\}$ , wo  $\theta^{-1}(\eta; \lambda)$  die inverse Funktion von  $\theta(\lambda, x)$  mit Bezug auf  $x$  bedeutet, bewiesen wird. Die Beweise beruhen alle auf Differentiation und Anwendung bekannter Ungleichungen zur Entscheidung des Vorzeichens der gefundenen Ableitungen.

*B. Jessen* (Kopenhagen).

**Bochner, S., and B. Jessen: Distribution functions and positive definite functions.** Ann. of Math., II. s. 35, 252—257 (1934).

Die Verf. bringen an die vom Ref. [Math. Z. 36, 618—629 (1933); dies. Zbl. 6, 162 und Amer. J. Math. 55, 309—331 (1933); dies. Zbl. 7, 157] und Haviland [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 19, 549—555 (1933); dies. Zbl. 7, 20] verwendete Methode zur Behandlung asymptotischer Verteilungsfunktionen die Modifikation an, daß sie an Stelle des in der erstgenannten Arbeit benutzten Stetigkeitssatzes des Hamburgerischen Momentenproblems den Stetigkeitssatz der Fourier-Stieltjesschen Transformierten verwenden, die a. a. O. neben dem Momentenproblem benutzt worden sind. Für beschränkte Funktionen (also z. B. im Falle Bohrscher Fastperiodizität) und, allgemeiner, sobald die Momente existieren und zu einem bestimmten Momentenproblem gehören, sind die beiden Behandlungsweisen vollkommen identisch. Die Verf. behandeln aber auch den Fall Besicovitchscher Fastperiodizität.

*Wintner*.

**Wintner, Aurel: On analytic convolutions of Bernoulli distributions.** Amer. J. Math. 56, 659—663 (1934).

Es sei  $\sigma(x)$  eine Verteilungsfunktion [d. h. eine nicht abnehmende Funktion mit  $\sigma(-\infty) = 0$ ,  $\sigma(+\infty) = 1$ ] und  $L(t; \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) d\sigma(x)$  ihre Fourier-Stieltjessche Transformierte. Wie leicht zu sehen, folgt aus  $L(t; \sigma) = O(|t|^{-1/\epsilon})$  für jedes  $\epsilon > 0$  die Existenz aller Ableitungen von  $\sigma(x)$  und aus  $L(t; \sigma) = O(\exp(-A|t|))$ , wo  $A > 0$ , die Regularität von  $\sigma(x)$  in der Umgebung jeder Stelle  $x$ , während aus  $L(t; \sigma) = O(\exp(-|t|^\gamma))$ , wo  $\gamma > 1$ , folgt, daß  $\sigma(x)$  eine ganze Funktion ist. Als symmetrische Bernoulli-Verteilung wird bezeichnet die Verteilungsfunktion  $\tau(x; a) = 0$  für  $x < -a$ ,  $= \frac{1}{2}$  für  $-a < x < a$ ,  $= 1$  für  $x > a$ ; es ist  $L(t; \tau) = \cos(at)$ . Ist  $\{a_n\}$  eine Folge positiver Zahlen mit  $\sum a_n^2 < +\infty$ , dann konvergiert das Produkt  $\cos(a_1 t) \cos(a_2 t) \dots$  gleichmäßig in jedem beschränkten  $t$ -Intervall und ist demnach die Fourier-Stieltjessche Transformierte  $L(t; \sigma)$  einer gewissen Verteilungsfunktion  $\sigma$ ; dieses  $\sigma$  ist die



„Faltung“ der Verteilungsfunktionen  $\tau(x; a_n)$ . Faltungen dieser Art sind mehrfach betrachtet worden, weil sie viele interessante Beispiele liefern. In dieser Note wird eine allgemeine Bedingung für die Folge  $\{a_n\}$  aufgestellt, welche zu Abschätzungen für  $L(t; \sigma)$  von der obigen Form führen. Sei  $N(t)$  die Anzahl aller  $a_n \geq t^{-1}$ ; gilt dann  $N(t) \sim t^\beta S(t)^{\pm 1}$ , wo  $\beta > 0$  und  $S(t)$  langsam ist [d. h.  $S(t)$  ist nicht abnehmend und  $S(ct)/S(t) \rightarrow 1$  für jedes  $c > 0$ ], so ist auf Grund eines Satzes von Pólya  $L(t; \sigma) = O(\exp(-At^\beta S(t)^{\pm 1}))$ , wo  $A > 0$ , woraus folgt  $L(t; \sigma) = O(\exp(-t^{\beta-\varepsilon}))$  für jedes  $\varepsilon > 0$ . Also existieren alle Ableitungen von  $\sigma(x)$  für jedes  $\beta(>0)$ , und  $\sigma(x)$  ist eine ganze Funktion, falls  $\beta > 1$ . Interessante Beispiele sind  $a_n = n^{-\alpha}$  und  $a_n = 1/p_n$ . B. Jessen (Kopenhagen).

**Verblunsky, S.: Trigonometric integrals and harmonic functions.** Proc. London Math. Soc., II. s. 38, 1—48 (1934).

The author has previously investigated the relationship between trigonometric series and the Poisson integral (see Proc. London Math. Soc., II. s. 34, 441—456, 457 bis 491; this Zbl. 6, 53 and 256). He now extends this to trigonometric integrals. Let  $A(x, t) = a(t) \cos xt + b(t) \sin xt$ . The author assumes the existence of a function  $F(t)$ , satisfying certain restrictions, such that

$$\int_0^\infty e^{-\eta t} A(x, t) t^{-2} dt = -\frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{F(t) dt}{\eta^2 + (x-t)^2}, \quad \eta > 0. \quad (1)$$

Put

$$\Delta^2 F(x, h) = F(x+h) - 2F(x) + F(x-h),$$

$$P(\eta, x) = \int_0^\infty e^{-\eta t} A(x, t) dt.$$

At a point where (1) tends to  $F(x)$  as  $\eta \rightarrow 0$ , the following relations hold

$$\overline{\lim} \Delta^2 F(x, h)/h \geq \pi \lim_{\eta} P(\eta, x), \quad \overline{\lim} \Delta^2 F(x, h)/h^2 \geq \lim_{\eta} P(\eta, x),$$

and two other inequalities obtained by interchanging  $\overline{\lim}$  and  $\lim$  and reversing the sense. If  $[|a(t)| + |b(t)|]t^{-2} \subset L(1, \infty)$ , if  $\overline{\lim} P(\eta, x)$  and  $\lim P(\eta, x)$  are integrable over every finite interval and finite except in a denumerable set where  $\eta P(\eta, x) \rightarrow 0$ , then  $\lim P(\eta, x) = \lim P(\eta, x)$  [=  $f(x)$  say] almost everywhere, and

$$a(t) + ib(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{ixt} dx \quad (C, 1) \quad (2)$$

for almost all  $t > 0$ . The conclusion is also valid under other assumptions except that (C, 1) may have to be replaced by (C, 2). If  $P(\eta, x)$  is bounded, its limit exists almost everywhere, and (2) holds. The author derives a nec. and suff. cond. that  $P(\eta, x)$  be bounded, further a representation of  $P(\eta, x)$  by a Poisson-Stieltjes integral when it is positive with corresponding formulas for  $a(t)$  and  $b(t)$ . E. Hille.

### Reihen :

**Ghika, Alexandre:** Sur les séries de fonctions harmoniques. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 660—662 (1934).

Il s'agit des modalités du développement en séries de polynômes harmoniques  $\varphi_n(Q)$ , formant un système orthogonal et normal le long de  $C$  (frontière d'un domaine simpl. connexe,  $D$ , dans l'espace à  $k$  dimensions) d'une fonction harmonique dans  $D$ .

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

**Severini, C.: Sulle serie doppie di funzioni ortogonali e normali. I.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 845—848 (1934).

**Severini, C.: Sulle serie doppie di funzioni ortogonali e normali. II.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 20, 18—22 (1934).

Im Anschluß an die Note des Verf. über die Parsevalsche Gleichung [Atti Accad.



naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 551—555 (1934); dies. Zbl. 9, 342] wird bewiesen: I. Die Funktionensysteme  $\varphi_0(x)$ ,  $\varphi_1(x)$ , ... und  $\psi_0(y)$ ,  $\psi_1(y)$ , ... seien im Intervall  $(a, b)$  abgeschlossen normierte Orthogonalsysteme, die Funktion  $f(x, y)$  sei im Bereich  $a \leq x \leq b$  samt ihrem Quadrat integrierbar. Wenn dann die Reihe

$$\sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} A_{\mu\nu} \varphi_{\mu}(x) \psi_{\nu}(y) \quad \text{mit} \quad A_{\mu\nu} = \int_a^b \int_a^b f(x, y) \varphi_{\mu}(x) \psi_{\nu}(y) dx dy$$

horizontal, d. h. in der Anordnung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu\nu} \varphi_{\mu}(x) \psi_{\nu}(y) \right\}, \quad (*)$$

im Bereich  $a \leq x \leq b$  konvergiert, so stimmen ihre Summenwerte fast überall mit  $f(x, y)$  überein; die Konvergenz gegen die Summenwerte  $f(x, y)$  ist wesentlich-gleichmäßig. — II. Die Systeme  $\varphi_{\mu}(x)$  und  $\psi_{\nu}(y)$  in I seien jetzt die Fourierschen Eigenfunktionen. Die Fouriersche Doppelreihe der Funktion  $f(x, y)$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) in der Anordnung (\*) sei im Punkte  $x_0, y_0$  konvergent, und es sei

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_0^{2\pi} |f(x, y) - f(x_0, y)| dy = 0.$$

Dann stimmt der Summenwert der Fourierschen Reihe mit der zweiten generalisierten

Ableitung  $\Phi''(y)$  der Funktion  $\Phi(y) = \int_0^y d\tau \int_0^{\tau} f(x_0, \eta) d\eta$  im Punkte  $y_0$  überein, und ist gleich  $f(x_0, y_0)$ , falls  $\Phi''(y_0) = f(x_0, y_0)$ , insbesondere also dann, wenn  $f(x_0, y)$  stetig an der Stelle  $y = y_0$  ist. R. Schmidt (Kiel).

**Droste, J.:** Eine einfache Theorie der Fourierschen Reihen. *Mathematica* (Leiden) 1, 205—210; 2, 97—106 (1933) [Holländisch].

Verf. gibt einen recht eleganten Konvergenzbeweis für die Fouriersche Reihe einer samt ihrer ersten Ableitung stückweisen stetigen und beschränkten Funktion. E. Hille (New Haven, Conn.).

**Mandelbrojt, S.:** Sur l'unicité des séries de Fourier. *J. École polytechn.*, II. s. cahier 32, 227—277 (1934).

This Bordin prize memoir takes up the following question. A function  $f(t) \subset L$  is known to have a property (A) in a set  $E$ , subset of  $(0, 2\pi)$ . What conditions on the Fourier coefficients of  $f(t)$  will induce (A) to hold almost everywhere? Only two special cases are considered; (A) is the property of being zero or of being quasi-analytic. In Ch. I  $f(t) = 0$  in  $(\alpha, \beta)$ . If  $\alpha < 0 < \beta$ , and  $f(t)$  has periodic derivatives of all orders,  $\min(-\alpha, \beta)$  is determined by the infinitary behavior of the Fourier coefficients of  $f(t)$ . The author obtains a number of unicity theorems for Fourier series from theorems of Fabry and Pólya on singularities of Taylor's series. The following is the simplest: If  $\beta - \alpha > 2\pi\delta$ , if the Fourier series of  $f(t)$  is lacunary with  $f_n = 0$  for  $n \neq n_j$ , and if the maximum density of  $\{n_j\}$  does not exceed  $\delta$ , then  $f(t) \sim 0$ . Chapters II and III are chiefly devoted to the relationship between the problem on hand and the theories of lacunary series and quasi-analytic functions. It is shown, for instance, that if a lacunary Fourier series vanishes in the mean with sufficient intensity near a point or with sufficient frequency, then  $f(t) \sim 0$ . These results have already been announced to the Académie des Sciences, and we refer to the reviews in this Zbl. 8, 152, 169 and 254 for further details. E. Hille (New Haven, Conn.).

**Mandelbrojt, S.:** Sur un problème concernant les séries de Fourier. *Bull. Soc. Math. France* 62, 143—150 (1934).

The author explains the intuitive reasoning lying behind some of the auxiliary theorems of the memoir in the preceding review. E. Hille (New Haven, Conn.).

**Zygmund, Antoni:** Some points in the theory of trigonometric and power series. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 586—617 (1934).

A collection of seven independent notes on related topics. 1. On the character of the oscillation of the partial sums of Fourier series. If  $s_n(x) \geq -\varphi(x) \subset L$ , then  $f(x) = \frac{1}{2} [\lim s_n(x) + \lim s_n(x)]$  almost everywhere. 2. On the absolute convergence of Fourier series. For every  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , there exists a function of bounded variation satisfying a Lipschitz condition of order  $\alpha$  such that the series  $\sum |f_n|^k$  diverges for  $k = 2/(2 + \alpha)$ . — 3. On a theorem of Fejér and Riesz [Math. Z. **11**, 305—314 (1921)]. Let  $C$  be the circumference of the unit circle,  $D$  an arbitrary diameter. Then if  $f(z) = u(z) + i v(z)$  is regular for  $|z| \leq 1$

$$\int_D |v(z)|^p |dz| \leq A_p^p \int_C |u(z)|^p |dz|,$$

and a similar inequality with  $v(z)$  replaced by  $v(z)/z$ . Here the constant  $A_p$  is uniformly bounded in  $1 \leq p \leq p_0$ , so the theorem is not a consequence of a well-known theorem of M. Riesz. 4. On a theorem on conjugate functions. Proof of a theorem of Kolmogoroff [Fundam. Math. **11**, 27—28 (1928)]. 5. On an extreme case in the theory of fractional integrals.  $f \in L^{1,k}$  if  $|f| [\log^+ |f|]^k \in L$ . If  $f \in L^{1,1-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , and  $f_\alpha$  is the Weyl fractional integral of order  $\alpha$  of  $f$ , then  $f_\alpha \in L^\beta$ ,  $\beta = 1/(1 - \alpha)$ , and

$$\left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^\beta dx \right]^{\frac{1}{\beta}} \leq M \int_0^{2\pi} |f| [\log^+ |f|]^{1-\alpha} dx + N.$$

6. Some theorems on Fourier constants. Sample: Let  $\{\varphi_n(x)\}$  be a uniformly bounded set of orthonormal functions. If

$$\sum |c_n| \left[ \log \frac{1}{|c_n|} \right]^{-\alpha} < \infty, \quad \alpha > 0,$$

then  $\sum c_n \varphi_n(x)$  is the Fourier series of a function  $f(x)$  such that  $\exp[k|f|^{1/\alpha}] \in L$  for every  $k > 0$ . 7. On a theorem of Paley and Wiener [Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 354—355 (1933); this Zbl. **6**, 257]. New proof. E. Hille (New Haven, Conn.).

### Differentialgleichungen:

**Toscano, Letterio:** Sull'iterazione degli operatori  $xD$  e  $Dx$ . Ist. Lombardo, Rend., II. s. **67**, 543—551 (1934).

The author investigates the iteration of the operators  $xD$  and  $Dx$  ( $D \equiv \frac{d}{dx}$ ) and in this way derives certain relations between Stirling's numbers  $C_{i,j}$ ,  $\lambda_{i,j}$  of first resp. second kind which enter into the developments

$$(x D)^m = \sum_{i=1}^m \lambda_{m,i} x^i D^i, \quad x^m D^m = \sum_{i=1}^m C_{m,i} (x D)^i, \quad (D x)^m = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{m+1,i} x^{i-1} D^{i-1}. \quad (1)$$

By induction we find the following factorization formula for  $(D x)^m - (x D)^m$  (analogous to that for algebraic powers):

$$(D x)^m - (x D)^m = [(D x) - (x D)] \sum_{i=0}^{m-1} (D x)^{m-i-1} (x D)^i,$$

also the following developments:

$$(D x)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (x D)^i, \quad (x D)^m = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (D x)^{m-i}. \quad (2)$$

From (2), applied to special functions (like  $e^{x-1}$ ), and making use of (1), we get, as stated above, various relations between  $C_{i,j}$ ,  $\lambda_{i,j}$ . Thus, for ex.,  $C_{m,i}$  is expressed explicitly, in determinant form, in terms of the  $\lambda$ 's, and (expressing  $x^m D^m$  as a linear combination of  $(D x)^i$ )

$$C_{m+1,r+1} = \binom{r}{r} C_{m,r} - \binom{r+1}{r} C_{m,r+1} \pm \dots + (-1)^{m-r} \binom{m}{r} C_{m,m}.$$



Note the interesting formula

$$\sigma_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sigma_i \quad (\sigma_i = \lambda_{i,1} + \lambda_{i,2} + \dots + \lambda_{i,i}).$$

The author gives many valuable bibliographical references.

*J. Shohat.*

**Locher, L.:** Zur Auflösung eines Systems von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. *Comment. math. helv.* 7, 47—62 (1934).

In this paper the author discusses the problem of a system of ordinary linear differential equations and derives anew the Heaviside Expansion Theorem. He emphasizes the importance of the initial conditions and his discussion is applicable to the case where the characteristic determinant has multiple roots. No new results are obtained, the object of the paper being a simple, mathematically valid, derivation of the Heaviside Expansion Theorem. The author seems unaware of a paper with the same object by the present referee [*Bull. Amer. Math. Soc.* 33, 81—89 (1927)].

*Murnaghan* (Baltimore).

**Drach, Jules:** Sur l'intégration logique des équations de la dynamique, à deux variables: Forces centrales. *C. R. Acad. Sci., Paris* 199, 749—752 (1934).

Verf. beschäftigt sich mit der Frage, wann eine Differentialgleichung der Form  $y'' = h \cdot F(x, y)$  für alle Werte des Parameters  $h$  auf Quadraturen zurückführbar ist, und zeigt hier an einigen Beispielen, wie dann das intermediäre Integral von  $y'$  und von  $h$  abhängt.

*Willy Feller* (Stockholm).

**Zaremba, S. K.:** Sur l'allure des caractéristiques de l'équation différentielle  $Y(x, y) dx - X(x, y) dy = 0$  au voisinage d'un point singulier isolé. *Bull. int. Acad. Polon. Sci. A* Nr 5/7, 197—207 (1934).

(A) Die reellen Funktionen  $f(x, y), g(x, y)$  seien in einer Umgebung des Punktes 0,0 stetig, und dieser Punkt sei ein isolierter singulärer Punkt des Systems

$$x'(t) = f(x, y), \quad y'(t) = g(x, y). \quad (1)$$

Im ersten Teil skizziert Verf. unter Benutzung eines Brouwerschen Hilfssatzes einen direkten Beweis für folgenden Satz, der implizit in allgemeinen Untersuchungen Brouwers über stetige Vektorverteilungen enthalten ist und unter der Voraussetzung, daß durch jeden Punkt nur eine Charakteristik geht, schon früher von Bendixson bewiesen ist: Wenn das System (1) unter der Voraussetzung (A) in einer Umgebung der singulären Stelle keine geschlossene Charakteristik aufweist, gibt es mindestens eine Charakteristik, die in die singuläre Stelle einmündet. — Der zweite Teil enthält folgenden Satz: Ist die Voraussetzung (A) erfüllt, vermitteln ferner die Funktionen  $u = f(x, y), v = g(x, y)$  in einer Umgebung der singulären Stelle eine eindeutige Abbildung mit Orientierungsänderung und sind die Kurven  $f^2 + g^2 = c$  konvex, so ist der singuläre Punkt ein Sattelpunkt im verallgemeinerten Sinne. *Kamke.*

**Tzortzes, A.:** Über die Integration einer Klasse Mongescher Gleichungen und über die Beudonschen Charakteristiken verschiedener Ordnung einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung mit  $n$  unabhängigen Veränderlichen. *Bull. Soc. Math. Grèce* 15, Nr 2, 17—35 (1934) [Griechisch].

Das vorliegende Heft enthält nur die Einleitung und den ersten Teil der in der Überschrift genannten Untersuchungen. Zu jedem System Mongescher Gleichungen

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; dx_1, dx_2, \dots, dx_{n+1}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (1)$$

wo die  $f_i$  homogene Funktionen der  $dx_1, dx_2, \dots, dx_{n+1}$  sind, gehört ein System von  $n-1$  partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (2)$$

wobei  $p_j = \frac{\partial x_j}{\partial x_{n+1}}$  für  $j = 1, 2, \dots, n$ . Es heißt nach Goursat das zum System (1) assoziierte System. Wenn das System (2) in Involution ist und ein von zwei unabhängigen Parametern abhängendes vollständiges Integral des Systems (2) bekannt ist, so läßt sich nach Goursat [*Bull. Soc. Math. France* 33, 201 (1905)] die allgemeine

Lösung des Systems (1) sofort angeben. Das legt die Frage nahe: Gegeben seien nur  $k < n - 1$  Mongesche Gleichungen der Gestalt (1), es sollen  $n - k - 1$  weitere in der Weise hinzubestimmt werden, daß das zugehörige assoziierte System in Involution ist. Diese Frage war bisher nur in dem besonderen Falle behandelt worden, daß erstens  $k = 1$  ist und daß zweitens außer den  $dx_1, dx_2, \dots, dx_{n+1}$  nur eine einzige der Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  in der linken Seite der gegebenen Gleichung (1) auftritt; vgl. Zervos, *Mém. Sci. math.* **53**, 19—20 (1932). Verf. behandelt jetzt das gestellte Problem ebenfalls für  $k = 1$ , aber ohne die zweite einschränkende Annahme. Zum Schluß zeigt Verf., daß die von ihm behandelten Mongeschen Gleichungen im allgemeinen nicht in die Klasse der kürzlich von Goursat [*Ann. Scuola norm. super. Pisa* (2) **1** (1932); dies. Zbl. **3**, 208] behandelten explizit integrierbaren Mongeschen Gleichungen fällt. — S. auch die Note des Verf. in *C. R. Acad. Sci., Paris* **189**, 561 (1929). (Vgl. auch Zervos, dies. Zbl. **4**, 8.) Bessel-Hagen (Bonn).

**Brillouin, Marcel:** Équations aux dérivées partielles du 2<sup>e</sup> ordre. Domaines à connexion multiple. Fonctions sphériques non antipodes. *Ann. Inst. H. Poincaré* **4**, 173—206 (1933).

This paper consists of 4 chapters. In I the author considers the problem of constructing a series which will yield, formally, the solution of the first boundary value problem for the equation

$$L(V) \equiv aV_{xx} + bV_{xy} + cV_{yy} + a_1V_x + b_1V_y + c_1V + a_2 = 0$$

in the case of a domain  $R$ , containing the origin  $O$ , such that each ray issuing from  $O$  pierces its boundary  $B$  in one and only one point. The coefficients  $a, \dots, a_2$  are functions of  $x, y$  whose properties are unspecified. Let  $r, \alpha$  be the polar coordinates of the variable point. Let  $B$  be given by  $r = f(\alpha)$ , and the boundary values, by  $h(\alpha)$ . Then (in general) numbers  $a_k^{(j)}$  can be so chosen that, for  $r = f(\alpha)$ , the functions

$$\Phi_k(r, \alpha) = \sum_{j=0}^k a_k^{(j)} U_j(r, \alpha), \quad k = 0, 1, \dots,$$

where

$$U_{2k-1} = r^k \sin k\alpha, \quad U_{2k} = r^k \cos k\alpha, \quad k = 0, 1, \dots,$$

are normal orthogonal on  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ . In the case of the Dirichlet problem the suggested solution is then

$$V_0 \equiv \sum_{k=0}^{\infty} B_k \Phi_k(r, \alpha), \quad \text{where} \quad B_k = \int_0^{2\pi} h(\alpha) \Phi_k(f, \alpha) d\alpha.$$

It is plain that  $V_0$  satisfies Laplace's equation formally; no attempt is made to prove more than this. In the case of the general equation  $L(V) = 0$ , the suggested solution is

$$V_1 = V_0 + \sum_{k=0}^{\infty} C_k F_k(r, \alpha), \quad C_k = - \int_R L(V_0) F_k dR,$$

where the  $F_k$  are certain functions normal orthogonal over  $R$ , which vanish on  $B$ . This solution seems to be in error formally. In II the same problem is considered for an annular region. In III regions of higher connectivity are studied. This involves a qualitative discussion of "electrostatic coordinates". In IV the author considers some examples of surface spherical harmonics of order 0 and some recurrence and integral formulas for such harmonics of order  $n$ , not necessarily integral. The examples are chiefly in connection with the problem: Are there surface spherical harmonics having poles at assigned points? The following example is cited. Let  $P_1, P_2, \dots, P_k$ ,  $2 \leq k$  be arbitrary points on a sphere  $S$  about  $O$  as center. Let  $P$  be a variable point on  $S$ ; and let  $\varphi_k = \angle POP_k$ . Then, provided  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = 0$ ,

$$\sum_{j=1}^k m_j \log(1 - \cos \varphi_k)$$

is a surface spherical harmonic of order 0. This function obviously has poles at the points  $P_1, \dots, P_k$ . Gergen (Rochester).



**Malmheden, H. W.:** Eine neue Lösung des Dirichletschen Problems für sphärische Bereiche. Fysiogr. Sällsk. Lund Förh. 4, Nr 17, 1—5 (1934).

The solution of the Dirichlet problem for the interval  $A_1 < x < A_2$  is equal at each point  $x$  of the interval to the number  $\{k_2 f(A_1) + k_1 f(A_2)\}/(k_1 + k_2)$ , where  $k_1 = x - A_1$ ,  $k_2 = A_2 - x$ , obtained by linear interpolation between the assigned boundary values  $f(A_1)$  and  $f(A_2)$ . Extending this idea of linear interpolation to  $n$ -space,  $n = 2, 3, \dots$ , and averaging the possible interpolated values, the author solves, very simply and without recourse to Poisson's integral, the Dirichlet problem for the interior  $T$  of an  $n$ -dimensional sphere  $t$ . Let  $f(A)$  be continuous on  $t$ . Let  $P$  be any point of  $T$ . Let  $\omega$  be a solid angle subtended by a hemisphere of a sphere about  $P$  as center. Corresponding to each point  $A_1$  of  $t$ , let  $A_2$  be the second point of intersection of the line through  $A_1$  and  $P$  with  $t$ . Let  $k_1 = A_1 P$ ,  $k_2 = A_2 P$ ; and let

$$U(P) = \frac{1}{\text{meas } \omega} \int_{\omega} \frac{k_2 f(A_1) + k_1 f(A_2)}{k_1 + k_2} d\omega, \quad (1)$$

where  $A_1$  is a point common to  $t$  and the element of integration  $d\omega$ . Then  $U(P)$ , defined as  $f$  on  $t$ , solves the Dirichlet problem for  $T$  with boundary values  $f$ . Incidentally, the integral in (1) can readily be reduced to Poisson's integral. The author obtains analogous results for the region exterior to  $t$  by linear extrapolation. *Gergen* (Rochester).

**Müller, Max:** Über die Gradienten der Greenschen Funktion. Math. Z. 39, 265 bis 268 (1934).

Es sei  $G(x, y; \xi, \eta)$  die in einem einfach zusammenhängenden Bereiche für den Punkt  $\xi, \eta$  gebildete Greensche Funktion des Ausdrucks  $\Delta u = 0$ . Es werden Integrale der Gradienten von  $G$ :  $\iint \sqrt{G_x^2 + G_y^2} dx dy$  bzw.  $\iint \sqrt{G_\xi^2 + G_\eta^2} dx dy$  betrachtet, genommen über einen Bereich  $\mathfrak{B}(c_1, c_2)$  zwischen zwei Niveaukurven  $G = c_1$ ,  $G = c_2$  mit dem Flächeninhalt  $F$ . Ausgehend von der Relation  $G = -\log |f(z)|$ , wobei  $f(z)$  die analytische Funktion ist, die den gegebenen Bereich auf den Einheitskreis und den Punkt  $\xi, \eta$  in den Nullpunkt abbildet, erhält der Verf. Abschätzungen dieser Integrale:

$$\begin{aligned} \iint \sqrt{G_x^2 + G_y^2} dx dy &\leq 2\sqrt{\pi F} \\ \iint \sqrt{G_\xi^2 + G_\eta^2} dx dy &\leq \frac{4}{3} |f'(x + iy)| F. \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung stellt eine Verschärfung eines Resultates von G. C. Evans [Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932); dies. Zbl. 6, 165] dar, die zweite eine Ergänzung zu früheren Untersuchungen des Verf. *Lüneburg* (Leiden).

**Rosenblatt, Alfred:** Sur l'application de la méthode des approximations successives de M. Picard à l'étude des équations du second ordre elliptiques et non linéaires à trois variables indépendantes. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 921—923 (1934).

**Rosenblatt, A.:** Sur les équations biharmoniques non linéaires à deux variables indépendantes. Bull. Sci. math., II. s. 58, 248—264 (1934).

Um die Konvergenz der Methode der sukzessiven Approximationen für die Gleichung  $\Delta \Delta u = F(x, y, u, u_x, \dots, u_{yy})$  in einem Gebiete  $D$ , mit den Randbedingungen  $u = \frac{du}{dn} = 0$ , unter passenden (für diese Art von Problemen sonst sehr allgemeinen) Voraussetzungen zu beweisen, bildet Verf. das Gebiet  $D$  auf eine Kreisscheibe konform ab, womit das Problem mittels mehrerer Abschätzungen auf den bereits untersuchten Fall, daß  $D$  ein Kreis ist, zurückgeführt wird. *G. Cimmino* (Napoli).

**Lamb, H.:** The propagation of waves of expansion in a tube. Proc. London Math. Soc., II. s. 37, 547—555 (1934).

The velocity potential for a concentrated line-source along the axis of  $z$ , of strength  $M$  per unit length and midway between the planes  $y = \pm b$ , is given by the equation

$$4b\Phi = M \{(ik)^{-1} \exp ik(ct - x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{-1} \cos(n\pi y) \exp(ikct - \mu_n x)\},$$

where  $b\eta = y$  and  $b^2 \mu_n^2 = n^2 \pi^2 - k^2 b^2$ . To discuss the case of a transient line-source the author takes  $\pi M = Q c dk \cdot e^{-k c \tau}$  where  $\tau$  is very small and integrates the expression for  $\Phi$  from  $k = 0$  to  $k = \infty$ . The first term in the series gives a progressive wave for which the potential, multiplied by  $4 \pi b$ , is  $Q c$  times the angle whose tangent is  $(ct - x)/c\tau$ . The other terms give integrals which, when  $\tau = 0$ , can be discussed very prettily by means of contour integration, the contours being similar to those used by Poincaré for a related integral. The physical predictions are easily verified and the final result is expressed in the form of a Schlömilch series whose sum was found by G. N. Watson. It can be interpreted physically by means of reflexions at the parallel walls and the known law for the effect in free space of a transient cylindrical wave.

H. Bateman (Pasadena).

**Green, George: Sources of various kinds near a plane boundary separating two different media.** *Philos. Mag.*, VII. s. 18, 625—640 (1934).

Es werden Probleme der Wärmeleitungs- und der Schwingungsgleichung behandelt, die entstehen, wenn in der Nähe einer Trennungsebene zwischen zwei verschiedenen Medien Quellen verteilt sind und die von den Quellen ausgehenden Wellenzüge an der Ebene reflektiert und gebrochen werden. Es werden ebene, linienförmig verteilte und punktförmige Quellen behandelt. Methodisch schließt sich die Arbeit an eine Reihe früherer Arbeiten des Verf. (vgl. dies. Zbl. 2, 365) an.

E. Rothe (Breslau).

**Pastori, Maria: Equilibrio di lastre e membrane elastiche.** *Rend. Circ. mat. Palermo* 58, 1—48 (1934).

Die Differentialgleichungen des Gleichgewichts und die Randbedingungen für die nichtisotropen elastischen Schalen und Platten werden mit Hilfe der Methoden des absoluten Differentialkalküls entwickelt. In der Einleitung sind die nötigen Formeln und Begriffe für Tensoren entwickelt, welche in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $V_3$  enthalten, aber nur in den Punkten einer darin eingebetteten  $V_2$  gegeben sind.

A. Lurje (Leningrad).

### Spezielle Funktionen:

**Mayr, Karl: Über die Iteration von linearen Funktionaloperationen.** *S.-B. Akad. Wiss. Wien* 143, 197—212 (1934).

Das Prinzip der Erzeugung von Funktionen (insbesondere Polynomen) durch Iteration linearer Funktionaloperationen, die auf einfache Grundfunktionen angewandt werden, gibt dem Verf. einen neuen und sehr einfachen Zugang zu Klassen von Polynomen, die Fuchsschen Differentialgleichungen 3. Ordnung genügen und als sinngemäße Verallgemeinerungen der Jacobischen und Laguerreschen Polynome anzusprechen sind. Der Verf. iteriert in dieser Arbeit allgemeine Funktionaloperationen der Gestalt

$$A\{f\} = x^\alpha \{\alpha f + \beta x f' + \gamma x^2 f''\},$$

wobei  $f(x) = e^x x^\sigma$  bez.  $= \frac{x^\sigma}{(1+x)^\alpha}$  angenommen wird. Der Vorteil seiner Methode, die er früher ausführlich auseinandersetzte (dies. Zbl. 5, 162) und zum Studium der Besselschen Funktionen verwandte, besteht darin, daß sich Aussagen über Orthogonalitätseigenschaften, Nullstellen u. dgl. oft unmittelbar aus der Natur der iterierten Operation ergeben. Iterationen in bezug auf Funktionen von mehreren Veränderlichen führen den Verf. u. a. dazu, den Beweis einer Vermutung von K. Friedrichs und H. Lewy über Potenzreihen mit lauter positiven Koeffizienten in Evidenz zu setzen (vgl. dies. Zbl. 7, 344 [Szegő und Kaluza]).

v. Koppenfels (Hannover).

**Walther, A.: Besselsche Funktionen.** *Z. Ver. Deutsch. Ing.* 78, 1297—1299 (1934).

**Venkatachaliengar, K.: On the reducibility of the general elliptic integral into logarithms.** *J. Indian Math. Soc.*, N. s. 1, 59—65 (1934).

Verf. ist bestrebt, hinreichende Bedingungen für die in der Überschrift genannte Reduzibilität eines elliptischen Integrals zu gewinnen, die auf die transzendenten Größen  $\eta$ ,  $\omega$  usw. keinen Bezug nehmen. Die von ihm gewonnenen hinreichenden



Bedingungen erscheinen freilich zum Teil zunächst als Bedingungen in den transzendenten Größen; Verf. gibt aber einen Weg an, sie in algebraische Bedingungen umzusetzen. Leider ist es Ref. nicht gelungen, festzustellen, was eigentlich das Gesamtsystem der Bedingungen des Verf. ist.

*Bessel-Hagen* (Bonn).

**Gheorghiu, Gh. Th.:** Sur les fonctions métasphériques. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 768—769 (1934).

The author considers the function

$$a_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p}(ix_1, ix_2, \dots, ix_p; \lambda) = \\ = \frac{2^p \lambda^p \lambda^{-N}}{\Gamma(-\lambda)} \int_0^\infty e^{-uX} u^{-\lambda-1} C_{\nu_1}(uX_1) C_{\nu_2}(uX_2) \dots C_{\nu_p}(uX_p) du$$

where  $N = \sum_{i=1}^p \nu_i$ ,  $X_k = x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_p$ , and  $C_\nu(u)$  is a cylinder function.

With the notation of a previous paper (this Zbl. 9, 311) it is shown that, when the  $\nu$  are not integers, the function can be expressed linearly in terms of the functions  $A_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p}(x_1, x_2, \dots, x_p; \lambda)$  previously considered. The particular case when there is only one variable  $x$ , and  $\nu$  is a positive integer, is discussed.

*W. N. Bailey.*

**Chowdhury, Amalechandra:** Reduction of some hyperelliptic integrals of genus (Geschlecht) five to elliptic integrals. Bull. Calcutta Math. Soc. 25, 159—166 (1934).

Verf. zeigt, wie spezielle hyperelliptische Integrale vom Geschlecht 5 durch geeignete Substitutionen der Integrationsvariablen auf elliptische Integrale reduziert werden können. Es handelt sich um  $\int \frac{x^a dx}{\sqrt{l x^{12} + m x^6 + n}}$  mit  $0 \leq a \leq 5$ ,  $a$  ganz,

wo  $l, m, n$  die Vorzeichenkombinationen  $\pm \mp \pm$  oder  $\pm 0 \pm$  aufweisen, ferner um das Integral  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{12} - 1}}$ .

*Petersson* (Hamburg).

## Variationsrechnung:

**Damköhler, Wilhelm:** Über indefinite Variationsprobleme. Math. Ann. 110, 230 bis 283 (1934).

The principal result of this paper is the theorem: Let  $B$  be a region of the  $xy$ -plane enclosed by a Jordan curve, and let

$$J(C) = \int_C g(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

be an integral in parametric form which is to be minimized. Let  $m$  denote the lower bound of the ratio  $J(C)/L(C)$  in the class of all closed rectifiable curves  $C$  in the region  $B$ , where  $L(C)$  is the length of  $C$ . Then for every  $\varepsilon > 0$  there is a polynomial  $\Phi(x, y)$  such that

$$g(x, y, \cos \theta, \sin \theta) + \Phi_x(x, y) \cos \theta + \Phi_y(x, y) \sin \theta \geq m - \varepsilon$$

for  $(x, y)$  in  $B$  and for all  $\theta$ . When  $m > 0$  this implies that the minimum problem may be replaced by an equivalent one which is positive definite.

*Graves* (Chicago).

**Schwarz, Josefa v.:** Das Delaunaysche Problem der Variationsrechnung in kanonischen Koordinaten. Math. Ann. 110, 357—389 (1934).

The Delaunay problem of determining the curves of maximum and minimum length in the class of curves in space having curvature  $= 1$  and satisfying given boundary conditions is reduced to a Lagrange problem by the introduction of additional variables. A Hamilton function is introduced and the extremals of the problem are determined by integration of the canonical equations. The so-called "Weierstrassian extremals" are shown to belong to the class 0 of Caratheodory if they are normal, and to the class 1 if abnormal. Circle arcs are shown to belong to the class 2. Extremizing arcs on which the second derivatives of the coordinates have one or more ordinary discontinuities (called "gestückelte Extremalen") are shown to be always made up of circle arcs. These may be of class 0, 1, or 2. The class of admissible curves is

extended to include all those having curvature  $\leq 1$ , and this problem is treated in the same fashion as the preceding by the introduction of an additional variable. The extremals are the same as before, except that straight lines may now be extremals and "die gestückelten Extremalen" may be made up of straight lines and circles. When the tangent at one end point is variable, all the extremals satisfying the transversality conditions are made up of straight lines and circles. The case when both end tangents are variable is still simpler. Finally, the author transforms the problem (following Schwarz) into an isoperimetric problem by use of the spherical indicatrix of the tangents of the curve, and it is shown that no new extremizing curves are found when the class of admissible curves is enlarged to include all curves such that on every sub-arc the ratio of the angle between the tangents at the end points to the length of the sub-arc is  $\leq 1$ . Graves (Chicago).

**McShane, Edward James: Existence theorems for ordinary problems of the calculus of variations.** Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 3, 287—315 (1934).

(For part I, see Zbl. 9, 23). The author obtains a number of existence theorems which complete the theory of the non-parametric problem in important respects. For example: If

$$I(y) = \int F(x, y, y') dx$$

is positive quasi-regular and

$$\lim_{x \rightarrow 0} x' F(x, y, y'/x') = \infty \quad (1)$$

and if  $K_a$  is a bounded complete class of absolutely continuous functions, then  $I(y)$  has a minimum on  $K_a$ . In succeeding theorems, exceptional curves on which the condition (1) fails to hold are permitted, and extensions to unbounded classes  $K_a$  are considered. In other theorems, the condition (1) is replaced by other more complicated assumptions. In particular, one theorem includes the case when the integrand  $F$  has the form  $F = \Phi(y) \sqrt{1 + y'^2}$ , and in this theorem it is shown that the minimizing functions satisfy a Lipschitz condition. In several cases theorems with weaker hypotheses are given for problems in the plane. Graves (Chicago).

**McShane, E. J.: On the analytic nature of surfaces of least area.** Ann. of Math., II. s. 35, 456—475 (1934).

Consider a surface  $S$  with equations  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ , these functions being continuous in a Jordan region  $B$ . Suppose the above equations carry the boundary of  $B$  in a one-to-one way into a Jordan curve  $C$ . Suppose that the area, in the Lebesgue sense, of  $S$  is a minimum with respect to all similar surfaces bounded by the same curve  $C$ . The purpose of the present paper is to find further restrictions on  $S$  which imply that  $S$  is a minimal surface in the sense of differential geometry. Let  $B_0$  be a subregion of the region  $B$  in which the equations of  $S$  are considered. Suppose that the coordinate functions  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  are all three constant on the boundary of  $B_0$ , but are not all three constant in  $B_0$ . Then the portion of  $S$ , corresponding to  $B_0$ , is called an excrescence defined by  $B_0$ . If  $\bar{x}(u, v)$ ,  $\bar{y}(u, v)$ ,  $\bar{z}(u, v)$  are the functions which are equal in  $B_0$  to the constant values of  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  on the boundary of  $B_0$  and which are equal to  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  otherwise, then the surface with equations  $x = \bar{x}(u, v)$ ,  $y = \bar{y}(u, v)$ ,  $z = \bar{z}(u, v)$  is said to result from  $S$  by removal of the excrescence defined by  $B_0$ . It is then shown that all excrescences of  $S$  can be removed, and that there results in this manner a surface  $S^*$  which is bounded by the same Jordan curve as  $S$ , and whose area is also a minimum (it is presupposed that the areas of all surfaces considered are finite). Finally,  $S^*$  is free of excrescences. There follows then that  $S^*$  is a saddle surface. Roughly speaking, this means that no subregion of  $S^*$  is bounded by a plane curve, unless the subregion is a plane region (otherwise, the area of  $S^*$  could be made smaller by replacing a certain subregion by a plane region). But, if a saddle surface is bounded by a Jordan curve and has a minimum area with respect to that curve, then the surface is a minimal surface in the sense of differential geometry, as proved by McShane [Parametrizations of saddle surfaces.



Trans Amer. Math. Soc. **35**, 716—733 (1933); this. Zbl. **7**, 119]. Summing up: If a surface  $S$ , bounded by a Jordan curve, has a minimum area, then the surface  $S^*$  resulting by removal of all excrescences is a minimal surface. In particular, since a Jordan surface (one-to-one and continuous image of  $u^2 + v^2 \leq 1$ ) is clearly free of excrescences, there follows: If a Jordan surface has a (finite) minimum area, then the surface is a minimal surface in the sense of differential geometry. The paper contains a number of further results and remarks of interest and importance, which restrictions of space do not permit to discuss here. *Tibor Radó* (Columbus, Ohio).

**Manià, Basilio:** Sopra una classe particolare di integrali doppi del calcolo delle variazioni. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **13**, 91—104 (1934).

The author proves the existence of an absolute minimum for double integrals of the form

$$I = \iint F(x, y, z, \partial z / \partial x) dx dy.$$

Such integrals are excluded in the existence theorems for double integrals previously given by Tonelli (see Zbl. **6**, 118). Besides certain restrictive assumptions on the  $x y$ -region over which the admissible surfaces are defined, and on the boundary values, it is assumed that for each  $y$  the simple integral

$$I(y) = \int F(x, y, z, \partial z / \partial x) dx$$

has an absolute minimum value given by an extremal  $\Gamma(y)$ . That the extremals  $\Gamma(y)$  generate an admissible surface for the integral  $I$  is shown by using a theorem on the differentiability of solutions of ordinary second order differential equations with respect to the values they take at the two ends of an interval and with respect to a parameter. This theorem is a modification of results due to Picard and to Lichtenstein. By combination with the well-known existence theorems and other results of Tonelli for simple integrals, other existence theorems for double integrals into which simple integrals do not enter explicitly are readily obtained. A simpler theorem on the existence of a "minimum in the small" is also given. It is noted that integrals such as

$$\iint F(x, y, z, a \partial z / \partial x + b \partial z / \partial y) dx dy$$

may be transformed to the form given above. An example is given to show the necessity of restrictions on the shape of the  $xy$ -region. *Graves* (Chicago).

### **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:**

**Blume, Johannes:** Zur axiomatischen Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Münster i. W.: Diss. 1934. 27 S.

Es wird der (bekanntlich a priori aussichtlose) Versuch durchgeführt, die Häufigkeitsdefinition der Wahrscheinlichkeit auf der Betrachtung endlicher Wiederholungsreihen aufzubauen. Die Wahrscheinlichkeiten sollen durch die entsprechenden Häufigkeiten näherungsweise festgelegt sein. Die vier Grundoperationen sowie der Wortlaut und Beweis der Fundamentalsätze werden aus der v. Misesschen Theorie wörtlich übernommen. Da aber über den Grad der Annäherung keine bestimmten Festsetzungen getroffen werden (und aus elementaren Gründen auch nicht getroffen werden können), wird die ganze Theorie unhaltbar. *A. Khintchine* (Moskau).

**Bower, O. K.:** Note concerning two problems in geometrical probability. Amer. Math. Monthly **41**, 506—510 (1934).

**Wilson, Edwin B.:** Boole's Challenge problem. J. Amer. Statist. Assoc. **29**, 301 bis 304 (1934).

A solution of this classical problem (see J. M. Keynes, Treatise on Probability, pp. 186—189) is given by quite elementary methods. An inequality governing the solution in addition to those of Keynes is given and there is a short numerical discussion. Three typographical errors, in particular  $c_1 c_2$  for  $c_1 + c_2$  on p. 303, may prove bothersome to some readers. *C. C. Craig* (Ann Arbor, Michigan).

**Mirimanoff, D.:** Sur un théorème de Cournot. Enseignement Math. **32**, 151—154 (1933).

**Mirimanoff, D.:** Sur un théorème de Cournot. II. Enseignement Math. **32**, 297 bis 303 (1933).

In dem Lehrbuch von Cournot wurden bezüglich der Wahrscheinlichkeiten

$$P(m, s) = \binom{m}{s} p^m q^{s-m} \quad (q = 1 - p)$$

dafür, daß bei  $s$  unabhängigen Versuchen mit konstanter Wahrscheinlichkeit  $p$  sich  $m$  günstige Resultate ergeben, folgende Aussagen gemacht: Betrachtet man den Quotienten  $\frac{P(m', s')}{P(m, s)}$  für  $s' > s$  und für alle diejenigen (zwischen 0 und  $s$  liegenden)  $m$ , für

die  $m' = m \frac{s'}{s}$  ganzzahlig ausfällt, so ist dieser Quotient erstens stets kleiner als 1 und nimmt zweitens bei festem  $s$  und  $s'$  ab, wenn  $m/s$  (nach oben oder unten) sich von  $p$  entfernt. — Von den vorliegenden beiden Noten des Verf. ist die erste einem elementaren, auf einem eleganten arithmetischen Hilfssatz beruhenden Beweis der ersten Aussage gewidmet, während die zweite auf Grund der Eulerschen Summenformel die zweite Aussage beweist.

*Bruno de Finetti* (Trieste).

**Lévy, Paul:** Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchainées. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 627—629 (1934).

Verf. betrachtet eine Folge abhängiger zufälliger Größen  $u_n$ , für welche die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $E_{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}}(u_n)$  immer gleich Null sind. Einige Resultate über die Gültigkeit des Gaußschen Grenzwertsatzes in diesem Falle und die Wahrscheinlichkeit der Konvergenz der Reihe  $\sum u_n$  werden ohne Beweise mitgeteilt.

*A. Kolmogoroff* (Moskau).

**Lévy, Paul:** Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **3**, 337—366 (1934).

Le mémoire présent contient des démonstrations complètes des certains résultats énoncés par l'auteur dans trois notes [C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 786—788, 1203—1205, 1661—1662 (1934); ce Zbl. **8**, 367, **9**, 27 et 73]. Pour éviter toute confusion possible, nous répétons ici ce qui est maintenant démontré. On considère des fonctions aléatoires  $x(t)$  nulles pour  $t = 0$  et définies dans l'intervalle  $(0, T)$ . La supposition essentielle est que l'accroissement  $\Delta x$  correspondant à l'intervalle  $(t, t + \Delta t)$  est indépendant des valeurs de  $x$  pour  $t' \leq t$ . On démontre dans ce cas que  $x(t)$  est une somme d'une fonction  $z(t)$  indépendante de l'hasard et d'une fonction aléatoire  $y(t)$  n'ayant, avec la probabilité un, qu'un ensemble dénombrable des points de discontinuité, tous ces points étant au surplus de la première espèce. On démontre aussi que  $y(t)$  peut être représentée comme la somme  $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$  de trois termes indépendants,  $y_1(t)$  correspondant aux discontinuités fixes de  $y(t)$ ,  $y_2(t)$  étant continu et gaussien et  $y_3(t)$  correspondant aux discontinuités mobiles de  $y(t)$ . Le terme  $y_3(t)$  est complètement défini par la fonction des sauts  $N(h, t)$ . On obtient en effet pour la fonction caractéristique  $E(e^{izy}) = \Phi(z, t)$  l'expression suivante:

$$\log \Phi(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ e^{izu} - 1 - iz \frac{u}{1 + u^2} \right] d_u N(u, t).$$

Ce résultat fondamental est considéré par l'auteur comme une extension d'une formule de Kolmogoroff. Le cas spécial des lois stables est étudié dans le § 9.

*A. Kolmogoroff* (Moskau).

**Fréchet, M.:** Sur l'équation fonctionnelle de S. Chapman et sur les problèmes des probabilités en chaîne. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **20**, 95—99 (1934).

Suivant Kolmogoroff (Math. Ann. **104**, 415; ce Zbl. **1**, 149) une fonction qui satisfait à l'équation fonctionnelle  $E$  (considérée d'abord par S. Chapman sous une forme différente) vérifie en même temps une équation aux dérivées partielles du type



parabolique pourvu qu'elle satisfasse aux certaines conditions complémentaires. Si ces conditions ne sont pas satisfaites, une solution de  $E$  peut vérifier une autre équation aux dérivées partielles. L'auteur donne d'abord une solution formelle de  $E$  sous la forme

$$f(M, s, P, t) = \sum_{i=1}^{i=+\infty} A_i(M, s) B_i(P, t)$$

où  $M$  et  $P$  sont deux points dans une région  $V$  de l'espace à  $\nu$  dimensions et où les fonctions  $A_i$  et  $B_i$  forment un système biorthonormé sur  $V$ . Il donne ensuite la solution particulière suivante de  $E$  [où  $\nu = 1$  et où  $V$  est l'intervalle  $(0, \pi)$ ]

$$f(x, s; y, t) = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=+\infty} \left[ \frac{a(s)}{a(t)} \right]^n \cos nx \cos ny \right\} \quad (1)$$

$a$  étant une fonction positive croissante, et il remarque que (1) ne rentre pas dans la classe des solutions qui satisfont aux éq. aux dér. part. paraboliques. J'ai donné (C. R. Acad. Sci. URSS 1934, 395; ce Zbl. 9, 263) une solution simple de  $E$  qui se déduit de (1) en posant  $a(s) = s$ . Cette solution simple est une fonction harmonique d'un point dont  $t$  et  $y$  sont les coordonnées polaires. Supposons que, dans la formule (1),  $a(s)$  soit une fonction deux fois dérivable; la fonction (1) vérifiera alors l'équation  $\Delta u = 0$  écrite en coordonnées polaires  $t, y$  où il faut introduire  $a(t)$  au lieu de  $t$  ce qui donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \left( \frac{a'}{a} - \frac{a''}{a'} \right) + \frac{a'^2}{a^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

$a'$  et  $a''$  étant les dérivées de  $a = a(t)$ .

B. Hostinský (Brno).

**Fisher, R. A.:** Probability likelihood and quantity of information in the logic of uncertain inference. Proc. Roy. Soc. London A 146, 1—8 (1934).

Jeffreys hat [Proc. Roy. Soc. London A 138 (1932); dies. Zbl. 5, 368] eine Methode entwickelt, wie man in gewissen Fällen die Verteilung des Präzisionsmaßes a priori bestimmen kann. Gegen die Fishersche Kritik [Proc. Roy. Soc. London A 139 (1933); dies. Zbl. 6, 174] hat Jeffreys eingewandt, daß Fisher das Grundprinzip falsch verstanden habe (vgl. dies. Zbl. 7, 71). F. zeigt nun an einem Beispiel, daß die andere denkbare Interpretation zu einem falschen Satz führt, und hält nach wie vor die Jeffreys'sche Arbeit für hinfällig. — Anschließend eine Erwiderung auf die polemischen Bemerkungen von Jeffreys über den Wahrscheinlichkeitsbegriff; während F. die Wahrscheinlichkeiten aus relativen Häufigkeiten ableitet, definiert sie Jeffreys subjektiv und von den zufälligen augenblicklichen Kenntnissen abhängig.

Willy Feller (Stockholm).

**Bartlett, M. S.:** The vector representation of a sample. Proc. Cambridge Philos. Soc. 30, 327—340 (1934).

The author considers in a given universe of  $n$  dimensions a variable vector  $S$  analyzed first into  $S = U + V$ , where  $U$  is in a given included space of  $p$  ( $\leq n$ ) dimensions,  $V$  being the residual component, and then into  $S = X + Y + V$ , where  $X$  is the component of  $U$  in a given subspace of  $q$  ( $\leq p$ ) dimensions. The components may be taken to form an orthogonal set, so that  $S^2 = X^2 + Y^2 + V^2$ , a square such as  $S^2$  denoting  $|SS'|$ . The effect of the component  $X$  is to be eliminated. This generalizes the interpretation by R. A. Fisher, Biometrika 10, 507—521 (1915), of a sample with  $n$  observations as being a vector in an  $n$ -space. The normal law as here interpreted is the unique law for which chance components are equally likely in all directions. As a test of the significance of  $Y$  is proposed the criterion,  $1 - \Delta$ , where  $\Delta = V^2/(Y + V)^2$ . Statistical illustrations are given indicating the value of a criterion of this sort. References include those to related papers of J. O. Irwin (this Zbl. 2, 200), S. S. Wilks (this Zbl. 6, 23) and of the author (this Zbl. 9, 121).

Albert A. Bennett.

**Thomson, Godfrey H.:** The orthogonal matrix transforming Spearman's two-factor equations into Thomson's sampling equations in the theory of ability. Nature 134, 700 (1934).

**Neyman, Jerzy:** On the two different aspects of the representative method: The method of stratified sampling and the method of purposive selection. *J. Roy. Statist. Soc., N. s.* **97**, 558—625 (1934).

Das Hauptziel des Aufsatzes ist, die theoretische Haltbarkeit und praktische Brauchbarkeit der von Bowley, Gini und Galvani benutzten „purposive selection“ zu untersuchen und diese Methode in beiden Hinsichten mit der üblichen „random sampling“ zu vergleichen. Das Ergebnis ist nicht zugunsten der purposive selection, indem nämlich ihre prinzipielle Brauchbarkeit durch Hypothesen bedingt ist, welche im allgemeinen nicht erfüllt zu sein brauchen; demgegenüber ist die Methode der random sampling auf jede Population grundsätzlich anwendbar. *A. Khintchine* (Moskau).

**Regan, Francis:** The application of the theory of admissible numbers to time series with constant probability. *Trans. Amer. Math. Soc.* **36**, 511—529 (1934).

Man betrachte eine zufällige Verteilung von Punkten auf der  $t$ -Achse, welche durch die Wahrscheinlichkeiten  $f(\alpha, \tau, t)$  dafür, daß auf dem Intervall  $(t, t + \tau)$  genau  $\alpha$  Punkte liegen, bestimmt ist. Eine solche Verteilung nennt Verf. eine „Zeitreihe“. Die Zulässigkeit von solchen wahrscheinlichkeitstheoretischen Schemata beweist Verf. vom Standpunkte der „admissible numbers“ von A. H. Copeland (vgl. z. B. dies. Zbl. **5**, 111). *A. Kolmogoroff* (Moskau).

**Morrison, J. T.:** Note on the correlation of time-series. *Philos. Mag., VII. s. 18*, 545—554 (1934).

Bekanntlich können zwei beobachtete zeitlich veränderliche Größen oft stark korreliert sein, obwohl sie „dem gesunden Menschenverstand“ nach nichts miteinander zu tun haben. Diese Erscheinung kann unter anderem von der gleichsinnigen Monotonität der beiden Trends herrühren. Verf. schlägt daher vor, die beiden Trends zuerst auszuschalten, und gibt hierzu ein einfaches, die Fishersche Polynomdarstellung benutzendes Verfahren an. [Ausführliche Darstellung des Problems bei U. Yule. *J. Roy. Statist. Soc.* **89**, 1—66 (1926).] *Willy Feller* (Stockholm).

**Tognoli, Guido:** Le formule fondamentali della matematica finanziaria espresse in modo semplice mediante simboli di commutazione analoghi a quelli della matematica attuariale per  $q_x = 0$ . *Period. Mat., IV. s. 14*, 303—316 (1934).

## Numerische und graphische Methoden.

● **Dwight, Herbert Bristol:** Tables of integrals and other mathematical data. New York: Macmillan comp. 1934. VIII, 222 S. geb. \$ 1.50.

Pages 1—182 of this book are occupied by a collection of mathematical formulae, especially in the integral calculus. It is unfortunate that space is taken up unnecessarily by formulae which no one would ever want to look up in a book of reference, e. g.  $\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

and  $\int dx = x$ ; and there is an extravagant reduplication of formulae, e. g. the binomial expansions of  $(1+x)^n$ ,  $(1-x)^n$ ,  $(1+x)^{-n}$ ,  $(1-x)^{-n}$  are all given separately. It is difficult also to see what purpose is served by statements like the following: “If a function takes the form  $0 \times \infty$  or  $\infty - \infty$ , it may, by an algebraic or other change, be made to take the form  $0/0$  or  $\infty/\infty$ ” (p. 12). There are six pages of formulae in elliptic functions, but these can scarcely be of much practical value, since they do not include the  $q$ -series, which are the most rapidly convergent and in general the most useful for calculation. Pages 184—218 are devoted to short numerical tables of trigonometric functions, logarithms, the Gamma function, exponential and hyperbolic functions, complete elliptic integrals, and Bessel functions. *Whittaker*.

**Bailey, V. A.:** The solution of algebraic equations by means of tables of logarithms. *Philos. Mag., VII. s. 18*, 529—539 (1934).

Wird in einer algebraischen Gleichung  $f(x) = 0$  statt  $x$  die neue Unbekannte  $\xi = \text{Log } x$  eingeführt, so lassen sich die Wurzeln gemäß einer durch Anwendung der Newtonschen Näherungsmethode zu gewinnenden Formel bequem berechnen, indem man genügend genaue Logarithmentafeln benutzt. Insbesondere bei Gleichungen höheren Grades ist dieses Verfahren dem Hornerischen vorzuziehen. Bailey gibt genaue Rechenschemata sowie Konvergenzbetrachtungen und Beispiele. *Nyström*.



**Nyström, E. J.:** Planimetrische Auswertung von Stieltjesintegralen. *Z. angew. Math. Mech.* **14**, 276—279 (1934).

Stieltjes-Integrale, d. h. Integrale der Form  $\int_a^b f(t) dh(t)$ , lassen sich durch gewöhnliches Planimetrieren finden, wenn man  $f(t)$  über der Funktionsleiter von  $h(t)$  aufzeichnet. Die zu planimetrierende Kurve entsteht also durch Abszistentransformation aus der Kurve  $y = f(t)$  in rechtwinkligen Koordinaten  $t, y$ . Verf. gibt eine Anordnung mit einfachsten Hilfsmitteln an, welche die Transformation (Umzeichnung) durch eine Bewegung des Zeichenblattes während des Planimetrierens ersetzt. Dazu müssen  $f(t)$  und  $h(t)$  in Kurvendarstellung vorliegen. Der Apparat muß allerdings im allgemeinen von zwei Personen bedient werden. Stieltjes-Integrale sind für die Anwendungen von Bedeutung; z. B. lassen sich Trägheitsmomente so schreiben, und zwar mit festem  $h(t) = \frac{t^3}{3} [f(t) \text{ von Fall zu Fall wechselnd}]$ , entsprechend für statische Momente, Fourier-Koeffizienten usw. Die Auswertung unbestimmter Stieltjes-Integrale ist ebenfalls möglich. *Th. Zech (Darmstadt).*

**Werkmeister, P.:** Ein Dreirollen-Momentenplanimeter. *Z. Instrumentenkde* **54**, 410—412 (1934).

Bei diesem neuen Momentenplanimeter werden die erforderlichen Winkel der einzelnen Meßrollen gegen die Momentenachse nicht durch Zahnradübertragung, sondern durch eine Art Gelenkmechanismus erzeugt. Mit einer Umfahrung kann die Fläche  $F$ , das statische Moment  $M$  und das Trägheitsmoment  $J$  bestimmt werden. Sind die entsprechenden Rollenabwicklungen  $n_F, n_M, n_J$ , die Apparatkonstanten  $K_F, K_M, K_J$ , so findet man  $F = K_F n_F, M = K_M n_M, J = K_J (n_F - \frac{1}{3} n_J)$ . Bei dem Gerät ist  $K_F = 250 \text{ cm}^2, K_M = 2500 \text{ cm}^3, K_J = 100000 \text{ cm}^4$  bzw.  $100 \text{ cm}^2, 400 \text{ cm}^3$  und  $6400 \text{ cm}^4$ . *G. Koehler (Erfurt).*

**Andreoli, Giulio:** Sull'analisi dei fenomeni ciclici. *Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend.*, IV. s. **4**, 96—103 (1934).

Unter Heranziehung der Ähnlichkeit mit der Theorie der fastperiodischen Funktionen wird das Problem der Analyse periodischer Vorgänge behandelt, woraus sich annähernde Verfahren für die Berechnung der einzelnen Komponenten ableiten lassen. *Bossolasco (Turin).*

**Müller, Hans:** Über die Behandlung von Mittelwerten aus einem Beobachtungsmaterial von geringem Umfang. *Ann. Hydrogr.* **62**, 418—423 (1934).

Der Verf. stellt noch einmal eine von Student (Biometrika 1908) und R. A. Fisher (Metron 1925) zur Behandlung von kleinem Beobachtungsmaterial entwickelte Methode dar und fügt zwei Beispiele aus der Meteorologie hinzu. *H. Münzner (Göttingen).*

## Geometrie.

**Ducci, Enrico:** Sulla deduzione immediata, da formule goniometriche, di relazioni per i poligoni regolari. *Boll. Un. Mat. Ital.* **13**, 230—232 (1934).

**Palamà, Giuseppe:** Altre relazioni fra i lati dei poligoni regolari. *Boll. Un. Mat. Ital.* **13**, 235—238 (1934).

**Court, N. A.:** Notes on the orthocentric tetrahedron. *Amer. Math. Monthly* **41**, 499—502 (1934).

**Steck, Max:** Zur Struktur der Vertauschungsaxiome  $V_1$  und  $V_2$  (Vertauschungskalkül). *S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss.* **1934**, 68—76 (Abh. 16).

Das Vertauschungsaxiom  $V_1$  besagt, daß, wenn 6 gegebene Punkte 1, 2, ..., 6 in dieser Reihenfolge ein Pascalsechseck bilden, sie dies auch noch tun bei einer der 6 Vertauschungen: (1, 3), (3, 5), (1, 5), (4, 6), (2, 6) und (2, 4). Diese Umbezeichnungen der gegebenen 6 Punkte liefern auf Grund der ebenen Verknüpfungsaxiome nur noch drei

weitere Pascalgeraden. Die Wirkung der genannten Transpositionen auf eine gegebene Pascalkonfiguration wird untersucht und symbolisch geschrieben. *R. Moufang.*

**Tognetti, Mario:** *Sulle omografie singolari particolari.* Ist. Lombardo, Rend., II. s. **67**, 350—362 (1934).

Dans ce travail l'a. montre comme on peut étendre la théorie géométrique connue des homographies non singulières particulières entre deux hyperespaces superposés, au cas des homographies singulières; et cela avec la méthode de Predella [v. P. Predella, Ann. Mat. pura appl., II. s. **17**, 113 (1889)], se basant sur la considération des points caractéristiques. Il examine aussi rapidement la question aux points de vue de Pincherle [v. S. Pincherle-U. Amaldi, Le operazioni distributive (Bologna: Zanichelli 1901), chap. IV] et d'Enriques [v. F. Enriques-O. Chisini, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, t. II (Bologna: Zanichelli 1918), p. 665], se rapportant respectivement à la théorie des opérations distributives et à la définition des espaces de points unis infiniement voisins.

*Beniamino Segre* (Bologna).

**Mikan, Milan:** *La géométrie réglée dans l'espace à quatre dimensions.* Publ. Fac. Sci. Univ. Charles Nr **131**, 1—11 u. franz. Zusammenfassung 11—12 (1934) [Tschechisch].

**Raynor, G. E.:** *On  $n + 2$  mutually orthogonal hyperspheres in Euclidean  $n$ -space.* Amer. Math. Monthly **41**, 424—438 (1934).

Beweis für die Existenz der Figur von  $n + 2$  paarweise orthogonalen Hyperkugeln im  $R_n$ . Beziehungen zwischen den Radien dieser Kugeln. Sätze betreffend die Simplexe, die aus  $n + 1$  der Mittelpunkte gebildet werden. Volumina dieser Simplexe. Radien der Schnitthyperkugeln von zweien der Hyperkugeln. *E. A. Weiss* (Bonn).

**Lemoine, T.:** *Enveloppe de la seconde asymptote d'une conique variable dont une asymptote passe par un point fixe.* (57. sess., Chambéry, 24. VII.—4. VIII. 1933.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 38—40 (1933).

Durch abzählende Methoden wird unter anderem der Satz hergeleitet: Wenn Kegelschnitte einem Dreieck umbeschrieben sind und eine Asymptote durch einen festen Punkt schicken, so umhüllt die andere Asymptote einen dem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitt.

*Cohn-Vossen* (Leningrad).

**Engel, Friedrich:** *Die Kegelschnitte als Elementvereine.* S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. **1934**, 1—4 (Abh. 8).

Ist  $x(t)$  ein Punkt einer Kurve und  $u(t)$  die zugehörige Tangente mit den homogenen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  und  $u_1, u_2, u_3$ , so sind  $x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3$  die Elementkoordinaten der Kurve im Punkte  $x(t)$ . Die Elementkoordinaten eines Kegelschnittes genügen vier Gleichungen, von denen eine überzählig ist, nämlich den Gleichungen  $(ax)(u\beta) - (bx)(u\alpha) = 0, (bx)(u\gamma) - (cx)(u\beta) = 0, (cx)(u\alpha) - (ax)(u\gamma) = 0, (u\alpha) = 0$ . Dabei ist z. B.  $(u\alpha) = 0$  die Inzidenzbedingung und die  $a, \dots, \gamma$  sind (durch Relationen wie z. B.  $(a\beta) = (b\alpha)$  verknüpfte) Konstanten. Bei passender Normierung genügen die Elementkoordinaten eines Kegelschnittes der Differentialgleichung

$$(u''x'') - (u'''x') = 0. \quad O. Borůvka \text{ (Brno).}$$

**Gambier, B., et Charles H. Rowe:** *Tétraèdres inscrits dans une quadrique  $Q$  et circonscrits à une autre quadrique  $Q$ .* Ann. École norm., III. s. **51**, 153—198 (1934).

Werden zwei Flächen 2. Ordnung beliebig vorgegeben, so gibt es im allgemeinen Falle  $\infty^4$  Tetraeder, die der einen ein-, der anderen umbeschrieben sind, und nur in dem Spezialfalle, in dem die Flächen sich in einem räumlichen Vierseit schneiden,  $\infty^5$  Tetraeder dieser Art. Sind im allgemeinen Falle zwei Eckpunkte auf der ersten  $F^2$  vorgegeben, so gibt es im allgemeinen zwei Tetraeder mit diesen Eckpunkten, die die verlangte Eigenschaft besitzen. (Die Spezialfälle, in denen  $\infty^1$  oder  $\infty^2$  Tetraeder eine gemeinsame Kante besitzen, werden ausführlich untersucht.) Wird aber ein Tetraederpunkt  $A$  auf der ersten Fläche vorgegeben, so kann als gegenüberliegende



Tetraederebene nicht eine beliebige Tangentialebene der zweiten Fläche gewählt werden. Diese Ebene muß vielmehr durch einen Punkt  $A'$  laufen, der  $A$  durch eine gewisse Kollineation (mit dem gemeinsamen Polartetraeder der beiden  $F^2$  als Ruhepunkt-tetraeder) zugeordnet ist (und dual). Um diesen Zusammenhang zwischen  $A$  und  $A'$  zu finden, wird zuerst der Fall von zwei konzentrischen Kugeln untersucht. Die Verwandtschaft ist in diesem Falle eine Streckung vom Kugelmittelpunkte aus. Für die entsprechende Kollineation des allgemeinen Falles wird eine interessante Konstruktion angegeben: Durch den Punkt  $A$  von  $F_1^2$  laufen zwei Erzeugende  $G', G''$ . Von  $G'$  laufen an  $F_2^2$  zwei Tangentialebenen, die  $F_1^2$  in den Erzeugenden  $g'', h''$  schneiden. Auf gleiche Weise liefert  $G''$  die Erzeugenden  $g', h'$ . Durch jede der Erzeugenden  $g', h', g'', h''$  lege man jetzt die fehlende Tangentialebene an  $F_2^2$ . Diese vier Ebenen schneiden sich in  $A'$ . Die beschriebene Kollineation wird weiter analytisch unter der Voraussetzung untersucht, daß das gemeinsame Polartetraeder der beiden  $F^2$  zum Koordinatentetraeder gewählt wird. Sie wird dann (synthetisch) auch für die Fälle behandelt, daß die beiden  $F^2$  sich in einer  $C^3$  und einer Geraden oder in einem Kegelschnitt und zwei Erzeugenden verschiedener Art durchdringen. Endlich werden die Tetraeder gesucht, die einer Raumkurve 3. Ordnung (oder 4. Ordnung) ein- und einer  $F^2$  umschrieben sind. Hier werden insbesondere in geometrisch anschaulicher Form die Bedingungen dafür angegeben, daß  $\infty^2$  Tetraeder existieren, die einer  $C^3$  ein- und einer  $F^2$  umschrieben sind, oder  $\infty^1$  Tetraeder, die einer Raumkurve 3. Ordnung ein- und einer Raumkurve 3. Klasse umschrieben sind. *E. A. Weiss.*

**Lebel: Triangles de Poncelet et généralisation.** Bull. Sci. math., II. s. 58, 240 bis 247 (1934).

Es seien  $S$  und  $S'$  zwei Kegelschnitte,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  die Wurzeln der Gleichung, die man durch Nullsetzen der Determinante von  $S - \lambda S'$  erhält. Die Schließungsinvariante kann dann in der Gestalt  $\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3}$  geschrieben werden. Ihr Verschwinden besagt, daß man zu jedem Punkte  $A$  von  $S$  eine Tangente von  $S'$  finden kann, welche  $S$  in den Punkten  $B$  und  $C$  derart schneidet, daß  $AB$  und  $AC$  Tangenten von  $S'$  werden. Definiert man im Raume auf analoge Weise die Größen  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , so erhält man als sachgemäßes Analogon zur Schließungslage zweier Kegelschnitte die durch das Verschwinden der Invariante  $\sqrt{\lambda_0} + \sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3}$  charakterisierte Lage zweier Flächen 2. Ordnung  $S$  und  $S'$ : Man kann zu jeder Erzeugenden  $G$  von  $S$  eine Erzeugende  $G'$  von  $S'$  finden, die  $S$  in zwei Punkten  $p$  und  $q$  derart schneidet, daß  $Gp$  und  $Gq$  Tangentialebenen von  $S'$  werden.  $G$  und  $G'$  sind dann Gegenkanten von  $\infty^2$  Tetraedern, die  $S$  ein- und  $S'$  umschrieben sind (vgl. vorst. Ref.). Die Bedeutung der Wurzeln  $\lambda_i$  legt es nahe, nach einer geometrischen Deutung der absoluten Invarianten  $\sqrt{\lambda_i : \lambda_k}$  zu suchen. Diese wird im Falle des ebenen Problems angegeben.

*E. A. Weiss (Bonn).*

**Weiss, E. A.: Über zwei Sätze von T. Kubota.** Tôhoku Math. J. 39, 40—41 (1934).

Zwei Sätze von T. Kubota über Geradenquadrupel in hyperboloidischer Lage und über gegenseitige Beziehungen zweier Tetraeder [Sci. Rep. Tôhoku Univ. (1), 19 (1930) und (1), 20 (1931)] bilden den Ausgangspunkt. Es wird das Verhältnis untersucht, in dem diese Sätze zu dem Satze von Chasles über zwei für eine Fläche zweiter Ordnung polare Tetraeder stehen, und die Beziehungen zu dem allgemeineren von Study bewiesenen Satze über die Verbindungslinien entsprechender Ecken und die Schnittgeraden entsprechender Ebenen homologer Tetraeder (Ber. d. oberhessischen naturf. Ges. 1900, 78—80). (Vgl. dies. Zbl. 2, 284 [Kubota]). *Haenzel.*

**Wolkowitsch, David: Sur l'étude purement géométrique du complexe de Painvin.** C. R. Acad. Sci., Paris 199, 654—655 (1934).

L'auteur étudie les propriétés géométriques élémentaires du complexe  $K$  des droites de rayon de gyration donné. La surface des singularités  $\Omega$  dérive d'un paraboloïde hyperbolique par la transformation  $X = x^2, Y = y^2, Z = z^2$ . C'est une surface de l'onde

de Fresnel si la quadrique qui définit  $K$  est un ellipsoïde. L'examen d'un système triple de surfaces  $\Omega$ . *S. Finikoff* (Moscou).

**Giovanardi, M.:** Sulla prospettiva lineare conica di figure piane. *Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 4*, 140—146 (1934).

Der Aufsatz empfiehlt einen praktischen Vorgang bei der Konstruktion des Zentralgrundrisses eines Objektes, wobei auch auf eine allfällige Änderung des Maßstabes Bedacht genommen wird. *E. Kruppa* (Wien).

**Ocagne, Maurice d':** Singulière hérésie traditionnelle concernant la théorie de la vis sans fin. *C. R. Acad. Sci., Paris* 199, 649—650 (1934).

Für ein Schneckengetriebe mit senkrecht gekreuzten Achsen gibt es eine theoretische (anscheinend bloß in der französischen Literatur heimische) Lösung, bei der auf der Schnecke Wendelflächen, auf dem Schneckenrade Schraubtorsen sitzen; die Übertragung der Bewegung erfolgt durch Punktberührung. Nunmehr hat sich herausgestellt, daß die Anordnung gar nicht arbeiten könnte, da die Flächen sich zwar berühren, aber auch gleichzeitig schneiden. *Eckhart* (Wien).

**Langlade, Pierre:** Sur les engrenages hélicoïdaux. *C. R. Acad. Sci., Paris* 198, 1970—1972 (1934).

Sätze aus einer angekündigten Arbeit über Schraubflächen und deren Anwendung auf Schraubenräder. *Eckhart* (Wien).

**Craig, H. V.:** Note on vector identities. *Amer. Math. Monthly* 41, 511—512 (1934).

It is the purpose of this note to point out that many of the identities of the older vector analysis may be established concisely by means of certain of the notations used in tensor analysis. *Autoreferat.*

**Finsterwalder, Seb.:** Lineare und halbbilineare Einschaltung in Pfeelfeldern. *S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss.* 1934, 5—17 (Abh. 9).

Wird jedem Punkt eines Bereichs ein Pfeil (= Vektor) zugeordnet, so entsteht ein Pfeelfeld. Sind die Pfeile nur in einzelnen Punkten bekannt, so kann man die dazwischen liegenden durch Einschaltung ergänzen. In einem eindimensionalen Feld teile man die Verbindungslinie zweier Punkte und die Verbindungslinie der Endpunkte der an ihnen angesetzten Feldpfeile im gleichen Verhältnis, so ergeben sich die eingeschalteten Pfeile durch Verbindung entsprechender Punkte. Bei einem zweidimensionalen Feld tritt an Stelle der Strecke das Dreieck, bei dreidimensionalen Feldern das Vierfläch. Sind die Pfeile an mehr Punkten gegeben, so muß eine Zerlegung in Dreiecke (oder Vierfläche) eintreten. — In manchen Fällen ist diese Zerlegung nicht günstig, dann kann die sog. halbbilineare Einschaltung verwendet werden. Sie stützt sich bei einem zweidimensionalen Bereich auf ein Viereck. Man teilt je zwei Gegenseiten des Vierecks im gleichen Verhältnis und verbindet entsprechende Teilpunkte (die Verbindungslinien bilden ein hyperbolisches Paraboloid). Die Punkte im Innern des Vierecks sind als Schnittpunkte von zwei Verbindungslinien aus den beiden Scharen bestimmt. Dieselbe Teilung wird nun auch bei den zugeordneten Pfeilen angewendet. Formelmäßig ausgedrückt, entspricht jetzt dem Punkt

$$(\mathfrak{X}_1 + \lambda \mathfrak{X}_2 + \mu \mathfrak{X}_3 + \lambda \mu \mathfrak{X}_4) : (1 + \lambda + \mu + \lambda \mu)$$

der Pfeil

$$(\mathfrak{B}_1 + \lambda \mathfrak{B}_2 + \mu \mathfrak{B}_3 + \lambda \mu \mathfrak{B}_4) : (1 + \lambda + \mu + \lambda \mu).$$

Vierecke mit einspringenden Winkeln oder gar überschlagene Vierecke geben dabei zu allerlei Besonderheiten Anlaß. Im Raum tritt an Stelle des Vierecks ein Raumgebilde, das kurz als mäßig verformter Würfel beschrieben werden kann. *L. Schrutka* (Wien).

**Sauer, Robert:** Projektive Sätze in der Statik des starren Körpers. *Math. Ann.* 110, 464—472 (1934).

Wenn man den unbestimmten Proportionalitätsfaktor in den Kleinschen Linienkoordinaten passend normiert und ihn bei Kollineationen passend mittransformiert, erhält man Koordinaten von Kräften, die in den betreffenden Graden angreifen, sowie lineare Transformationen von Kraftsystemen, die erstens in den Angriffsgraden pro-



ektiv sind und zweitens Gleichgewichtssysteme in ebensolche überführen. Dieser Sachverhalt wird genauer dargelegt. Insbesondere gehen die und nur die Kräfte, die in Graden der Fluchtebene angreifen, in Kräftepaare über, und entsprechend umgekehrt. Hierdurch ergibt sich ohne jede Rechnung der Satz: Jedes zu einem Ausnahmefachwerk kollineare Fachwerk ist Ausnahmefachwerk. Da bekanntlich die Kräfte formal gleiche Eigenschaften haben, wie infinitesimale Bewegungen, schließt sich ohne weiteres der Satz an: Jedes Polyeder, das zu einem wackeligen Polyeder kollinear ist, ist wackelig. Indem man ähnlich wie die Kollineationen auch die Korrelationen normiert, erhält man „Kraftkorrelationen“, die unter anderem die ebene Statik auf die Kinematik eines um einen festen Punkt drehbaren Körpers abbilden, wobei ebene Gleichgewichtssysteme in solche Infinitesimaldrehungen übergehen, deren Resultante verschwindet.

*Cohn-Vossen (Leningrad).*

**Salkowski, Erieh: Eine kennzeichnende Eigenschaft des Kreises.** S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1934, 57—62 (Abh. 14).

In Kennzeichnungen des Kreises, die Hirakawa (dies. Zbl. 7, 318) angegeben hat, werden die Voraussetzungen erheblich abgeschwächt, und zwar werden folgende Sätze bewiesen: Ein ebener regulärer Kurvenbogen habe die Eigenschaft, daß drei Scharen von Sehnen der festen Längen  $2d_1$ ,  $2d_2$  bzw.  $2d_3$  jeweils konstante Bogenlängen abschneiden; die drei Zahlen  $2d_1$ ,  $2d_2$ ,  $2d_3$  seien ferner so beschaffen, daß es ein der Kurve eingeschriebenes Dreieck mit diesen Seitenlängen gibt. Dann ist die Kurve ein Kreisbogen. Wenn in einem ebenen Kurvenbogen alle Sehnen über der konstanten Bogenlänge  $2s$  dieselbe Länge  $2d$  und auch alle Sehnen über der Bogenlänge  $s$  dieselbe Länge  $2d'$  haben, so ist die Kurve ein Kreisbogen. Sind alle Sehnen einer geschlossenen konvexen Kurve, die von ihr den  $n$ -ten Teil ( $n > 2$ ) des Umfanges abschneiden, einander gleich, so ist die Kurve ein Kreis. *W. Fenchel.*

**Hirakawa, Junkô: Another proof of the inequalities concerning the vectorial domain of the oval and ovaloid and its extension for the relative differential geometry.** Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 16, 352—356 (1934).

Für die bekannten Abschätzungen des Inhalts des Vektorenbereichs eines konvexen Bereichs in der Ebene und im Raume wird ein Beweis angegeben, der nur unwesentlich von den Beweisen von Estermann [Jber. Deutsch. Math.-Verein. 36, 197—200 (1927); Math. Z. 28, 471—475 (1928)] und Süß [Jber. Deutsch. Math.-Verein. 37, 87—90 (1928)] abweicht (vgl. auch Bonnesen und Fenchel, Erg. Math. 3, H. 1, 105). Ferner werden Begriffsbildungen und Sätze einer früheren Arbeit des Verf. auf den Raum übertragen (vgl. dies. Zbl. 8, 404—405; der dort erhobene Einwand trifft auch hier zu).

*W. Fenchel (Kopenhagen).*

**Rosenthal, Artur: Über die Nichtexistenz von Kontinuen in gewissen Mengen mit einziger Ordnungszahl.** S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1934, 49—56 (Abh. 13).

Verf. hat früher (S.-B. Bayer. Akad. Wiss., Math.-phys. Kl. 1922, 221—240) unter anderem die bemerkenswerte Tatsache bewiesen, daß es z. B. im euklidischen  $n$ -dimensionalen Raume  $R_n$  Punktmengen  $M_r$  gibt, welche mit jeder Hyperebene [d. h.  $(n - 1)$ -dimensionalen, linearen Mannigfaltigkeit] des  $R_n$  genau  $r$  Punkte gemeinsam haben ( $2 \leq n \leq r$ ). Es gibt derartige  $M_r$ , die in vorgeschriebenen Gebieten überall dicht liegen und sonst nirgends dicht. Daran schließt sich die Frage, ob eine  $M_r$  Kontinua enthalten könne. Diese Frage wurde vom Verf. seinerzeit für  $n = 2$ ,  $r = 2$  verneint, für  $n = 2$ ,  $r \geq 4$  bejaht. Nunmehr wird auch für  $n = 2$ ,  $r = 3$  die Antwort, und zwar im verneinenden Sinne gegeben. Darüber hinaus wird für jedes  $n \geq 2$  gezeigt: Im  $R_n$  kann keine  $M_r$  mit  $n \leq r \leq 2n - 1$  ein Kontinuum von  $n$ -ter Ordnung enthalten, während für  $2n \leq r$  (sogar beliebig vorgeschriebene) Teilkontinua einer Ordnung  $k$  mit  $k \leq r - n$  auftreten können; ferner kann keine  $M_r$  mit  $r > n$  bzw.  $r > n$  einen Jordanbogen der Ordnung  $r$  bzw. der Ordnung  $(r - 1)$  enthalten. Daraus folgt im Falle  $n = 3$  bzw.  $n = 4$  noch schärfer, daß für  $3 \leq r \leq 5$  bzw. für  $4 \leq r \leq 7$

in einer  $M$ , Teilkontinua überhaupt unmöglich sind; damit sind auch diese Fälle völlig erledigt. *Haupt* (Erlangen).

### Algebraische Geometrie:

**Vries, Jan de:** Eine Abbildung der Kongruenz der kubischen Raumkurven durch vier Punkte, die zwei feste Geraden treffen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **37**, 391—395 (1934).

Die kubischen Raumkurven  $\varrho^3$  der Kongruenz enthalten die Punkte  $B_1, B_2, B_3, B_4$  und treffen die Geraden  $c', c''$ . Als Bild der  $\varrho^3$ , welche  $c'$  in  $C_1$  und  $c''$  in  $C_2$  trifft, betrachtet Verf. die Spur der Geraden  $C_1 C_2$  in der vorgegebenen Ebene  $E$ . Die Mitteilung enthält eine Untersuchung der angegebenen Abbildung, der zusammengesetzten Kurven  $\varrho^3$ , der Fläche 30er Ordnung der Kurven  $\varrho^3$ , welche eine Gerade treffen, und der Fläche 60er Ordnung der Kurven  $\varrho^3$ , welche eine Ebene berühren. *G. Schaake*.

**Bath, F., and H. W. Richmond:** A notation for the contact-primes and families of contact-quadratics of canonical curves. II. Proc. London Math. Soc., II. s. **38**, 49—71 (1934).

Die Zweckmäßigkeit der von den Verff. schon in einer früheren Arbeit [J. London Math. Soc. **7** (1932); dies. Zbl. **5**, 110] eingeführten Bezeichnung für die Thetacharakteristiken wird durch Anwendungen auf die Geometrie der kanonischen Kurven dargestellt. *Kähler* (Hamburg).

**Godeaux, L.:** Sur les surfaces de genres un possédant une involution de bigenre un. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **20**, 93—95 (1934).

L'Auteur établit le théorème suivant: si une surface de genres un possède une involution d'ordre deux, de genres zéro et de bigenre un, elle est transformée en elle-même par les transformations birationnelles d'un groupe infini discontinu. La démonstration repose sur l'existence, sur la surface de genres un, de faisceaux de courbes elliptiques bisécantes. *P. Dubreil* (Nancy).

**Libois, P.:** Sur une classe de plans quadruples. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 867—871 (1934).

Etude de plans quadruples correspondant à un groupe abélien de trois involutions du second ordre: valeurs des genres et bigenre de ces plans. *P. Dubreil* (Nancy).

**Burniat, Pol:** Sur les transformations birationnelles de l'espace ayant deux points fondamentaux associés isolés. I. comm. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **20**, 753—766 (1934).

L'Auteur étudie les transformations birationnelles  $T$  faisant correspondre aux plans d'un espace  $S'$  des surfaces  $F$  d'un espace  $S$ , en supposant que les surfaces  $F$  possèdent un point-base  $O$  multiple et que ce point est fondamental-associé à un point  $P'$  de  $S'$ , c'est à dire qu'à un point  $X$  variable du domaine du premier ordre de  $O$  correspond un point  $X'$  variable dans le domaine du premier ordre de  $P'$ , une courbe passant simplement par  $X$  correspondant en général à une courbe passant simplement par  $X'$ . Ces points  $O$  et  $P'$  sont dits de première espèce quand leurs domaines se correspondent birationnellement, de seconde espèce dans le cas contraire. Il existe alors quatre types  $T_1, T_2, T_3, T_4$  de transformations  $T$ :  $T_1$  et  $T_2$  associent deux points de première espèce,  $T_3$  et  $T_4$  deux points de seconde espèce. Dans  $T_1$  et  $T_3$ , le point associé à  $O$  est un point propre; dans  $T_2$  et  $T_4$ , il est infiniment voisin d'un point propre. *P. Dubreil* (Nancy).

**Pirard, René:** Sur une transformation birationnelle involutive de l'espace. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **20**, 767—772 (1934).

Etude d'une transformation birationnelle involutive ayant comme éléments unis les plans d'un faisceau. Détermination du système homaloïdal correspondant et de la surface unie de la transformation. *P. Dubreil* (Nancy).



## Differentialgeometrie:

**Kowalewski, Gerhard:** Über räumliche Affinzykloiden. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1934, 18—26 (Abh. 10).

Verf. führt eine affingeometrische Untersuchung durch, die in seinem Buche „Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen“ nur teilweise erledigt ist. Jedes orientierte Kurvenelement vierter Ordnung  $x, y, z, y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3, y_4, z_4$  mit  $y_2 z_3 - y_3 z_2 > 0$  (ein sog. Kurvenelement erster Art) ist auf eine Weise affinäquivalent mit dem orientierten Element  $e_0$ :

$x$	$y$	$z$	$y_1$	$z_1$	$y_2$	$z_2$	$y_3$	$z_3$	$y_4$	$z_4$
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0

Das Bogenelement der Affingruppe, geeicht auf  $e_0$  ist  $ds = (y_2 z_3 - y_3 z_2)^{\frac{1}{6}} dx$ . Weiter gibt es bei einer Raumkurve zwei Differentialinvarianten fünfter Ordnung  $I$  und  $J$ , die sog. Affinkrümmungen, die man auf  $e_0$  geeicht annehmen kann, so daß sie sich beim Übergange zu  $e_0$  auf  $y_5$  und  $z_5$  reduzieren. Verf. zeigt an einigen Beispielen, wie man eine Kurve aus ihren natürlichen Gleichungen  $I = I(s)$ ,  $J = J(s)$  bestimmen kann. So bestimmt er die durch  $e_0$  hindurchgehende Kurve mit verschwindenden Affinkrümmungen, die sog. Normkurve:  $x = s$ ,  $y = \frac{s^2}{2}$ ,  $z = \frac{s^3}{6}$ . Auch findet er die Parameterdarstellung für den Fall  $I = \text{konst.} \neq 0$ ,  $J = 0$ . Schließlich läßt er die zuletzt gefundene Kurve auf der zuerst gefundenen Normkurve im Sinne der Affingeometrie rollen und findet so eine räumliche Affinzykloide. Diese Kurve empfiehlt er der Aufmerksamkeit der Geometer. Die Affinzykloide und die Normkurve haben in entsprechenden Punkten parallele Tangenten. *G. Schaake* (Groningen).

**Butchart, J. H.:** Ruled surfaces tangent along a curve. Amer. Math. Monthly 41, 510—511 (1934).

**Kuzmin, R.:** Sur la théorie de la déformation des surfaces. C. R. Acad. Sci. URSS 3, 209—210 u. franz. Zusammenfassung 211 (1934) [Russisch].

Ein konvexes Flächenstück  $F$  habe eine ebene Randkurve. Nebenbedingung:  $F$  besitze schlichte Normalprojektion auf die Randebene. Dann wird durch sehr einfache Rechnung gezeigt:  $F$  besitzt keine „Gleitverbiegung“, d. h. keine Infinitesimalverbiegung, bei der der Rand in seiner Ebene bleibt. Es wird fälschlich behauptet, der Satz gelte auch ohne die Nebenbedingung. Schon Liebmann hat (S.-B. Akad. Wiss. München 1920) den ersten Satz bewiesen und den zweiten widerlegt. *Cohn-Vossen*.

**Mühlbach, Richard:** Ebene Kurven, Krümmungstreifen und Flächen in der Laguerre-Geometrie. Hamburg: Diss. 1933. 53 S.

Die Arbeit zerfällt in drei Abschnitte. Im ersten Teile werden ebene gerichtete Kurven in der Laguerre-Geometrie (L-Geometrie) untersucht. Die Schar der Krümmungskreise einer ebenen Kurve wird durch  $\mathcal{K}(t)$  mit  $\dot{\mathcal{K}}(t) \dot{\mathcal{K}}(t) = 0$  angesetzt und mit Hilfe der L-Zykel eine L-Entfernung eingeführt. Es wird gezeigt, daß, wenn die 5. Ableitungen von  $\mathcal{K}(t)$  stetig sind und die Krümmungskreise und Linienelemente nicht

stationär sind, die L-Entfernung durch  $\sigma = \int_0^t \sqrt{\dot{\mathcal{K}} \ddot{\mathcal{K}}} dt$  ausgerechnet werden kann. Die

Ableitungsgleichungen bei Verwendung der L-Entfernung als Parameter enthalten eine Invariante, die L-Krümmung  $\Phi$ . Die Variation der L-Bogenlänge ergibt als Extremalen die Kurven konstanter L-Krümmung. Von Kurven durch zwei feste Krümmungselemente besitzen die Kurven mit konstanter L-Krümmung die größte L-Bogenlänge. Der zweite Teil behandelt gerichtete Krümmungstreifen im Raum. Auch hier wird eine L-Entfernung zweier Flächenelemente eingeführt, diese als Parameter verwendet und Ableitungsgleichungen angegeben. Ein Krümmungstreifen im Raum hängt von zwei Invarianten, der L-Krümmung  $\Phi$  und der L-Windung  $\Psi$  ab. Als Lösung des Variationsproblems kommen Krümmungstreifen mit festem  $\Phi$  und verschwindendem  $\Psi$  heraus. Die hinreichenden Bedingungen werden ebenfalls unter-

sucht. Im dritten Teile werden Variationsprobleme der Flächentheorie L-geometrisch behandelt (erste Variation der L-Oberfläche, Sätze über L-Minimalflächen, Extrem-eigenschaft der Mittenkugelschar, zweite Variation der L-Oberfläche, Kleinsteigenschaft der L-Minimalflächen). *Heinrich Schatz* (Innsbruck).

**Matsumura, Sôji: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln. III.** Mem. Fac. Sci. a. Agricult. Taihoku Univ. **5**, 247—269 (1933).

L'auteur poursuit l'étude de la géométrie cerclée (voir ce Zbl. **5**, 309; **7**, 73). L'article contient 15 paragraphes qui traitent des divers problèmes (sans aucune liaison entre eux) de la théorie des systèmes des cercles en  $R_3$ , de la théorie des enveloppes et des propriétés qui caractérisent la sphère parmi les surfaces convexes. *S. Finikoff*.

**Matsumura, Sôji: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln. IV.** Mem. Fac. Sci. a. Agricult. Taihoku Univ. **5**, 271—285 (1933).

Quel que soit un point  $P$  d'un volum convexe  $E$ , il existe un minimum  $F$  de l'aire des sections planes de  $E$  qui contiennent  $P$ ; s'il n'existe plus qu'un seul point sur un diamètre de  $E$  qui possède plus d'une section qui réalise le minimum  $F$ ,  $E$  est l'espace intérieur d'une sphère (voir aussi ce Zbl. **6**, 221). Divers problèmes de la géométrie des familles des cercles. *S. Finikoff* (Moscou).

**Matsumura, Sôji: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln. V.** Mem. Fac. Sci. a. Agricult. Taihoku Univ. **5**, 303—346 (1933).

Diverses questions traitées dans le mémoire: l'angle  $\varphi$  d'une sphère qui passe par un cercle  $K$  avec un autre cercle  $\bar{K}$ ; le nombre de maxima et minima de  $\sin^2 \varphi$ ; système des couples de courbes déterminé par une équation entre trois sphères  $\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}$ ; condition qu'une courbe en  $R_n$   $\xi_i = \xi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) est contenue dans  $R_{n-1}$ ; les droites infiniment voisines de  $R_3$  qui concourent; théorie relative des systèmes des cercles etc. Il est impossible d'énumérer les 24 paragraphes du mémoire. *S. Finikoff*.

**Matsumura, Sôji: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln. VI.** Mem. Fac. Sci. a. Agricult. Taihoku Univ. **5**, 347—367 (1933).

Des problèmes traités: représentation d'une sphère en  $R_3$  par un point dans  $R_4$ ; les trois formes de Kommerell d'une  $F_2$  en  $R_4$ ; certaines propriétés caractéristiques de la sphère; points multiples d'un système  $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$  de courbes  $f_i = f_i(\xi^0, \xi^1, \xi^2) = 0$  etc. *S. Finikoff* (Moscou).

**Matsumura, Sôji: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln. VII.** Mem. Fac. Sci. a. Agricult. Taihoku Univ. **5**, 379—394 (1933).

Les problèmes traités: le nombre de maxima et minima de  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  où  $x_k$  sont liés par les équations  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), est égal à  $(n-1)(p_1-1)(p_2-1) \dots$  où  $n, p_i$  sont les degrés de  $f, g_i$ . Exemple: les maxima et minima d'une sphère  $\eta = \sum \alpha \xi^\alpha$  qui passe par un cercle sont réalisés par les deux points-sphères du faisceau. Distances affines entre deux points qui se correspondent dans une inversion et un point d'une surface. Propriétés élémentaires de l'inversion. *S. Finikoff* (Moscou).

**Matsumura, Sôji: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln. IX.: Einige Anwendungen der Kreis- und Kugelgeometrie.** Mem. Fac. Sci. a. Agricult. Taihoku Univ. **10**, 81—174 (1934).

Le mémoire contient 15 paragraphes qui traitent des problèmes séparés: la géométrie relative au sens de M. Süss [Jap. J. Math. **4**, 57 (1927)] et la géométrie relative affine d'une courbe plane convexe; premières notions de la théorie conforme des surfaces; premières notions de la théorie d'une courbe (ou d'une surface) lieu du point de contact de deux cercles (ou de deux sphères); congruences des sphères et des cercles: leurs invariants, les familles de sphères qui se touchent, généralisation en espace elliptique; divers problèmes et formules de la géométrie de Lie des cercles et des sphères; quelques formules pour les lignes de longueur nul d'une surface lieu de cercles; plusieurs problèmes particuliers de la théorie des faisceaux des cercles et des sphères etc. Plusieurs fautes d'impression. (VIII. vgl. dies. Zbl. **9**, 83.) *S. Finikoff* (Moscou).



**Gambier, Bertrand:** Sur certaines variétés de l'espace à quatre dimensions. (57. sess., Chambéry, 24. VII.—4. VIII. 1933.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 36—38 (1933).

Die Gleichung  $F(u, v, w, t) = \text{konst.}$  läßt sich, wie Verf. sehr einfach zeigt, nicht immer in die Form  $f(u, v) = g(w, t)$  bringen. Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür gegeben, wann diese Separation möglich ist. Dann wird diskutiert, wann man diese Separation auf mehrere Weisen machen kann, wann also z. B. außerdem noch eine Gleichung der Form  $h(u, w) = k(v, t)$  mit  $F = \text{konst.}$  äquivalent ist. Anwendung auf Flächenpaare, auf denen sich die Krümmungslinien entsprechen, und bei denen in entsprechenden Punkten die Hauptkrümmungsradien übereinstimmen (solche Flächen brauchen nicht kongruent zu sein). Cohn-Vossen (Leningrad).

**Grove, V. G.:** On a certain correspondence between surfaces in hyperspace. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 627—636 (1934).

Der Ortsvektor  $x(u, v)$  einer Fläche eines hinreichend hochdimensionalen linearen Raumes bestimmt zusammen mit seinen 5 Ableitungen bis zur einschließlich 2. Ordnung einen jedem Flächenpunkt  $P$  zugeordneten linearen Raum  $S_2(P)$ , der im allgemeinen 5-dimensional sein wird. Gefragt wird nach Flächenpaaren derart, daß in entsprechenden Punkten  $P, P'$  der Flächen gilt:  $S_2(P) = S_2(P')$ . Man hat also in gewissem Sinne eine mehrdimensionale Verallgemeinerung der Bertrandschen Kurvenpaare vor sich. Das Problem wird weitgehend unter Berücksichtigung von Spezialfällen durchdiskutiert. Stets stellt sich folgende Bedingung als notwendig heraus: Bezeichnet  $S_3(P)$  den linearen, jedem Flächenpunkt zugeordneten Raum, der vom Ortsvektor und seinen Ableitungen bis zur dritten Ordnung aufgespannt wird, so darf  $S_3(P)$  für Flächen der gesuchten Paare höchstens 7-dimensional sein (im allgemeinen ist  $S_3$  ersichtlich 9-dimensional). In Spezialfällen muß sich die Dimension von  $S_3$  noch stärker erniedrigen. Cohn-Vossen (Leningrad).

**König, R., und E. Peschl:** Axiomatischer Aufbau der Operationen im Tensorraum. II. Mitt. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 86, 267—298 (1934).

Auch diese zweite Mitteilung (vgl. dies. Zbl. 9, 326) beschäftigt sich mit der linearen Mannigfaltigkeit (l. M.) im großen. Es werden folgende Operationen behandelt. § 17—19. Die unbestimmte Multiplikation liefert zusammen mit einer Symmetriebildung eine bestimmte Multiplikation. Es entsteht die Aufgabe, alle möglichen bestimmten Produktbildungen aufzuzählen, für welche das assoziative Gesetz gilt. 20. Einführung der Tensorbereiche über mehreren l. M. 21. Die komplementäre Mannigfaltigkeit. 22. Gemischte Tensoren. 23. Frage nach der Vertauschbarkeit der folgenden Prozesse: Bildung der l. M. höheren Grades und Symmetriebildung einerseits und Bildung der kompl. M. andererseits. 24. Sinnvolle gemischte Einheitstensoren. 25. Die Ergänzung. 26. Faltung. 27. Inneres Produkt. 28—29. Einschränkung der Gruppe (speziell affine Gr., orthogonale Gr. mit Determinante +1). 30. Beispiele l. M.en. 31. Lineare Zweigmannigfaltigkeiten und Realisierungen, z. B. in der Einbettungstheorie (die  $i$ -ten Komponenten der Vektoren eines  $n$ -Beins). Griss (Doetinchem, Holl.).

## Topologie:

**Stone, M. H.:** Boolean algebras and their application to topology. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 20, 197—202 (1934).

Die Arbeit beginnt mit der Aufstellung des Idealbegriffes und des dazugehörigen Homomorphiesatzes für die sog. Booleschen Algebren (ein System von Elementen mit zwei assoziativen und gegenseitig distributiven Operationen, die im übrigen den Axiomen der logischen Addition und logischen Multiplikation genügen). Die Menge der Primideale einer Booleschen Algebra wird topologisiert; sie geht dabei in einen total-zusammenhangslosen bikompakten Hausdorffschen Raum über. Die betreffenden Räume sind dann und nur dann homöomorph, wenn die Algebren isomorph sind. Ist umgekehrt ein total-zusammenhangsloser bikompakter Hausdorffscher Raum  $R$

gegeben, so erhält man eine Boolesche Algebra, wenn man im System der gleichzeitig abgeschlossenen und offenen Mengen des Raumes  $R$  die beiden Operationen der mengentheoretischen Addition und Multiplikation (Durchschnittsbildung) einführt. Die so gewonnene Beziehung zwischen den Booleschen Algebren und den total-zusammenhangslosen Hausdorffschen bikompakten Räumen ist wechselseitig und erlaubt die Isomorphie zweier mathematischen Theorien: der Theorie der Booleschen Algebren und der Topologie der total-zusammenhangslosen bikompakten Räume festzustellen. Diese Räume nennt Verf. deshalb die Booleschen Räume. Der zweite Teil der Arbeit ist Anwendungen auf beliebige Hausdorffsche Räume gewidmet. Den Ausgangspunkt bildet irgendein System  $A$  disjunkter abgeschlossener Mengen eines normalen Raumes  $S$ , topologisiert nach Alexandroff [Math. Ann. **96**, 557 (1926)] (Umgebung eines Punktes  $F$  des Mengenraumes ist die Menge aller Mengen des Systems  $A$ , welche in einer Umgebung der Menge  $F$  liegen). Ist ein Hausdorffscher Raum  $R$  dem so gewonnenen Mengenraum homöomorph, so sagt man, daß eine Abbildung  $m(R, S, A)$  vorliegt. Mit Hilfe dieses Begriffes wird ein Isomorphismus zwischen der Topologie der Hausdorffschen Räume und der Theorie der Systeme abgeschlossener Mengen in Booleschen Räumen festgestellt. Je nach der Art der erwähnten Mengensysteme erhält man verschiedene Typen Hausdorffscher Räume. Auf diese Weise werden die absolut abgeschlossenen Hausdorffschen Räume, die regulären, die bikompakten Räume aufs neue charakterisiert. Dabei werden auch neue topologische Resultate gewonnen; es wird bewiesen, daß jeder Hausdorffsche Raum einer überall dichten Punktmenge eines absolut abgeschlossenen Hausdorffschen Raumes homöomorph ist, daß ein Hausdorffscher Raum dann und nur dann bikompakt ist, wenn alle seine abgeschlossenen Punktmenge absolut abgeschlossen sind. Zum Schluß wird jedem Hausdorffschen Raume eine Kardinalzahl zugeordnet, die im Falle kompakter metrisierbarer Räume mit der Brouwer-Urysohn-Mengerschen Dimension übereinstimmt. *Alexandroff* (Moskau).

Čech, Eduard: Sur les nombres de Bettilocaux. Ann. of Math., II. s. **35**, 678—701 (1934).

Im ersten Kapitel werden die Bettischen Zahlen in einem Punkte eines topologischen Raumes definiert. Die Definition stimmt im wesentlichen mit der vom Ref. in C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 227 u. 315 (1934) (dies. Zbl. **8**, 275 u. 276) gegebenen überein, sie wird aber für eine allgemeinere Klasse von Räumen, nämlich für alle topologischen (nicht nur für kompakte metrische) Räume formuliert. Im zweiten Kapitel werden lokale Additionssätze bewiesen; dabei wird vom Raume nur die vollständige Normalität vorausgesetzt. Bezeichnet man mit  $b_k(a, A)$  die  $k$ -dimensionale Bettische Zahl des Raumes  $A$  im Punkte  $a$ , so gilt unter den Voraussetzungen  $R = A + B$ ,  $a \in A \cdot B$ ,  $b_{k+1}(a, A) = b_{k+1}(a, B) = 0$  die Formel  $b_k(a, AB) \geq b_{k+1}(a, R)$ , unter der Voraussetzung  $b_k(a, A) = b_k(a, B) = 0$  dagegen  $b_k(a, AB) \leq b_{k+1}(a, R)$ . Im dritten Kapitel wird der Axiomatik des allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriffes, die Verf. (vgl. dies. Zbl. **8**, 86) gegeben hat, eine neue und einfachere Form gegeben. Angesichts dieser neuen Fassung des Čechschen Mannigfaltigkeitsbegriffes nimmt der Ref. seine im Referat über die soeben zitierte Arbeit gemachte Bemerkung betreffend den komplizierten Charakter der Axiomatik des Verf. zurück. Das vierte Kapitel beginnt mit einer auf dem Zyklensbegriff fußenden Definition der inneren Punkte einer Menge. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird der Fall  $A \subset R$  betrachtet und die Bettischen Zahlen von  $R - A$  in der Nähe des Punktes  $a \in A$  werden definiert. Hieselbst werden in sehr allgemeinen Voraussetzungen lokale Zerschneidungssätze bewiesen. Im fünften Kapitel wird für euklidische  $R$  (Verf. verlangt sogar weniger) und abgeschlossene  $A \subset R$  der lokale Dualitätssatz von Alexander bewiesen (vgl. die zitierte Note des Ref.). Außerdem wird eine Reihe interessanter Spezialisierungen für den nulldimensionalen Fall (Zerlegungen), darunter eine Lokalisierung der Janiszewskischen Zerschneidungssätze, gegeben. Es sei zum Schluß bemerkt, daß die Resultate des Verf. notorisch unabhängig sind von den Resultaten der zitierten Note des Ref., denn die Abhandlung des Verf. wurde vor dem Erscheinen der genannten Note eingereicht. *Alexandroff*.



Čech, Eduard: Sur les arcs indépendants dans un continu localement connexe. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr 193, 1—10 (1934).

Beweis des Nöbelingschen  $n$ -Bogensatzes.

*P. Alexandroff* (Moskau).

Kamiya, Hitosi: A theorem on plane continua. Tôhoku Math. J. 39, 368—371 (1934).

The author calls a point  $p$  of a continuum  $M$  a partial branch point of  $M$  provided that for a sufficiently small neighborhood  $V$  of  $p$ ,  $p$  cuts the component  $N$  of  $V \cdot M$  which contains  $p$  into at least three mutually separated sets. It is then shown that the set of all partial branch points of any plane continuum is countable, whereas a continuum in 3-space may have uncountably many such points. The author seems not to have noticed that an even stronger result was proven by R. L. Moore in the Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 14, 87 (1928). *G. T. Whyburn* (University, Virginia).

Eilenberg, Samuel: Sur le plongement des espaces dans les continus acycliques. Fundam. Math. 24, 65—71 (1934).

Eine kompakte Menge  $M$  wird  $r$ -dimensional azyklisch genannt, wenn jeder  $r$ -dimensionale wahre Zyklus in  $M$  homolog Null in  $M$  ist. Verf. beweist nun, daß ein beliebiger metrischer kompakter Raum  $C$  stetiges Bild eines  $n$ -dimensionalen kompakten Raumes  $Q$  ist, dessen Schichten (Urbildmengen einzelner Punkte von  $C$  bei der betreffenden Abbildung) lauter  $r$ -dimensional azyklische Mengen für  $r = 0, 1, \dots, n-1$  sind. Daraus ergibt sich die Einbettbarkeit eines beliebigen metrischen kompakten Raumes  $C$ , und zwar für jedes  $n > 0$ , in ein lokal zusammenhängendes  $r (= 0, 1, \dots, n-1)$ -dimensional azyklisches Kontinuum  $K$ , wobei  $\dim(K - C) = n$  ist. Als Sonderfall davon ist der Hurewiczsche Satz über Einbettbarkeit kompakter Räume  $C$  in unikohärente Kontinua (vgl. dies. Zbl. 5, 417 u. 7, 132) zu erwähnen. Eine andere Folgerung daraus ist die Einbettbarkeit eines jeden metrischen separablen ( $n > 0$ )-dimensionalen Raumes  $S$  in ein gleichdimensionales, lokal zusammenhängendes und ( $r \neq n$ )-dimensional azyklisches Kontinuum. *B. Knaster* (Warszawa).

Wilder, R. L.: Concerning irreducibly connected sets and irreducible regular connexes. Amer. J. Math. 56, 547—557 (1934).

Nach Gehman heißt die Punktmenge  $M$  irreduzibel zusammenhängend über  $K \subset M$ , wenn  $M$  zusammenhängend ist, aber keine zusammenhängende echte Teilmenge  $\supset K$  enthält; ist  $M$  über  $K$ , aber über keiner echten Teilmenge von  $K$  irreduzibel zusammenhängend, so heißt  $K$  eine Basismenge für  $M$ ; ist  $M$  lokal zusammenhängend (zusammenhängende Umgebungen!), zusammenhängend und  $\supset K$ , hat jedoch keine echte Teilmenge von  $M$  diese drei Eigenschaften, so heißt  $M$  ein irreduzibler regulärer Konnex. Verf. beweist zunächst notwendige und hinreichende Bedingungen für den irreduziblen Zusammenhang über einer beliebigen und einer endlichen Menge. Ist  $M$  irreduzibel zusammenhängend über der endlichen Menge  $K$ , so auch über der Menge aller Punkte von  $K$ , die nicht Zerlegungspunkte (cutpoint) von  $M$  sind. Ist  $K$  Basismenge für  $M$ , so ist  $K$  die Menge aller Nichtzerlegungspunkte von  $M$  und jede Menge, über der  $M$  irreduzibel zusammenhängend ist, enthält  $K$ . Enthält die Basis  $K$  von  $M$  genau  $n$  Punkte, so enthält  $M$  höchstens  $n-2$  Zerlegungspunkte mit Ordnungen  $> 1$ . Ist  $M$  ein irreduzibler regulärer Konnex über  $K$  und  $K$  kompakt in  $M$ , so ist  $M$  kompakt in sich. *Nöbeling* (Erlangen).

## Mechanik.

● Appell et Dautheville: Précis de mécanique rationnelle. 5. edit. Paris: Gauthier-Villars 1934. 658 S. et 235 Fig. Frs. 100.—.

Akopian, Al.: Die Eigenschaften des Deviationsmoments, als Vektor betrachtet. Appl. Math. a. Mech. 2, 61—72 u. dtsch. Zusammenfassung 72—73 (1934) [Russisch].

Bei der Drehung eines festen Körpers um eine raumfeste Achse läßt sich das Hauptträgheitsmoment der äußeren Kräfte in folgender Form schreiben:

$$\bar{M}_A = J_{AK} \ddot{\omega} + [\bar{A}_K \dot{\omega}] + \bar{A}_K \omega^2$$

( $J_{AK} = \sum m_s a_s^2$ , Trägheitsmoment,  $\bar{\omega}$  Winkelgeschwindigkeitsvektor,  $\bar{A}_K = \sum [m_s \bar{r}_s \bar{K}_s]$ ,  $\bar{r}_s$  Abstand des Massenpunktes  $m_s$  vom Koordinatenursprung  $A$ ;  $\bar{K}_s$  Projektion dieses Abstandes auf die Richtung  $AK$ ; fällt  $AK$  mit  $AZ$  zusammen, so sind die Projektionen von  $\bar{A}_K$  auf  $AX$ ,  $AY$ ,  $AZ$  bzw. gleich  $\sum m_s y_s z_s$ ,  $-\sum m_s z_s x_s$ , 0) aus diesem Grunde bezeichnet Verf. den Vektor  $\bar{A}_K$  als Deviationsmomentvektor; es werden die Eigenschaften dieses Vektors untersucht. *A. Andronow und A. Witt (Moskau).*

**Nagabhushanam, K.: On the transformation theory of dynamics in the manifold of states and time.** J. Indian Math. Soc. **20**, 236—243 (1934).

The author studies, by aid of the tensor calculus, some aspects of the transformation-theory in the  $(2n + 1)$ -manifold of states and time, in which the form

$$L dt = \sum p_r dq^r - H dt$$

is a Pfaffian of rank  $(2n + 1)$ . Properties of the integrals of motion are obtained: in particular, it is shown that if  $2n$  of the coordinates are integrals of motion, while the remaining coordinate is a measure of time, then any component of the bilinear covariant, which involves the suffix  $(2n + 1)$ , vanishes. *Whittaker (Edinburgh).*

**Lanczos, Cornel: Eine neue Transformationstheorie linearer kanonischer Gleichungen.** Ann. Physik, V. F. **20**, 653—688 (1934).

In the first section the author gives a method for reducing any problem of the Calculus of Variations to a normal form, in which the differential equations that arise are a Hamiltonian set. He then considers specially problems in which the Hamiltonian function is a homogeneous quadratic form in the dependent variables, the coefficients of the form being in general, functions of the independent variable. All self-adjoint-linear differential equations, or systems of such equations, and all the equations arising in the perturbation-theories of mechanics, belong to this group. The author develops a method of transforming the Hamiltonian function to principal axes, by means of linear canonical transformations. When the system has been reduced to its principal axes, the canonical equations fall apart and can be integrated directly. The method furnishes a useful procedure of successive approximation for integrating the differential equations of mathematical physics: The well-known Kramers-Wentzel-Brillouin method of approximation in wave-mechanics is a particular case of this procedure. The results are applied to the theory of Green's function: and in an appendix, the method is extended to equations which are not self-adjoint. *Whittaker.*

**Martin, M. H.: Metrically transitive point transformations.** Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 606—612 (1934).

The chief result is that the elliptic modular group of linear fractional transformations is metrically transitive with respect to the real axis in a sense defined by the author. The proof depends on the use of continued fractions. There are also several other closely related minor results. *Daniel C. Lewis jr. (Princeton).*

**Castelfranchi, Lina: Problemi di moto che ammettono integrali primi lineari, interi o fratti, rispetto alle componenti della velocità.** Giorn. Mat. Battaglini, III. s. **72**, 1—18 (1934).

L'argomento, già stato oggetto di studio di vari autori (Bertrand, Vivanti, De Cristoforo, Odone) con metodi svariati, è ripreso ed esteso dall'A. con l'esclusivo impiego dei metodi vettoriali — omografici di Burali-Forti e Marcolongo. Nel primo § vengono considerati quei moti piani che ammettono per la loro equazione un integrale primo razionale fratto rispetto al vettore velocità. La semplice ed esauriente trattazione dà mezzo all'A. di dare una nuova dimostrazione di un elegante teorema, enunciato dal Cerruti, e mediante il quale si caratterizzano, con semplice deduzione da un particolare moto centrale, i problemi in questione. Nel secondo e terzo § si considerano i moti spaziali che ammettono un integrale lineare, oppure lineare fratto rispetto al vettore velocità. In questo secondo caso la ricerca, non facile, viene con-



dotta a termine con procedimento rapido ed elegante, sia per lo sviluppo formale dei calcoli, sia per la interpretazione geometrica. *R. Marcolongo* (Napoli).

**Merlo, Giovanni:** Sulla dinamica dei sistemi piani. Atti Accad. Sci. Torino **69**, 415—431 (1934).

Si dimostra che la risultante delle forze di inerzia passa sempre per un punto — polo di inerzia — caratterizzato dalla geometria del moto e delle masse. Da ciò la soluzione del problema cinetostatico dei sistemi piani: nel moto incipiente e nel moto per inerzia. — Si conclude con un teorema per cui ogni moto istantaneo si sdoppia nei moti suddetti. *Autoreferat.*

**Merlo, Giovanni:** Sul teorema delle forze vive nei moti rigidi piani. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **67**, 594—598 (1934).

Si semplifica l'applicazione del teorema delle forze vive ai sistemi piani pesanti comunque vincolati, introducendo opportunamente nel calcolo la formula classica:  $v = \sqrt{2gh}$ . Seguono due esempi caratteristici. *Autoreferat.*

**Lovett, Edgar Odell:** Sur le problème de Bertrand pour certaines courbes qui généralisent les coniques. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 514—516 (1934).

The author determines the most general law of central force acting upon a particle and depending only upon the position of the particle such that the orbit is necessarily a curve satisfying the integrable differential equation  $[(y'')^{-2/m}]''' = 0$ , irrespective of the initial conditions. The results are thus generalizations of Appell's treatment of Halphen's solution of Bertrand's problem, to which they reduce by taking  $m = 3$ . The author also obtains a generalization of Tisserand's treatment. *Lewis jr.*

**Doucet, E.:** Sur les phénomènes de relaxation. (57. sess., Chambéry, 24. VII. à 4. VIII. 1933.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 86—88 (1933).

**Korn, Arthur:** Über das Rechnen mit unendlich hohen Frequenzen in der Mechanik. (Ein neues Rechenverfahren.) S.-B. Berlin. math. Ges. **33**, 55—61 (1934).

Verf. untersucht sehr rasche Schwingungen in Flüssigkeiten; die Periode  $T$  soll so klein sein, daß  $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$  klein gegen  $\frac{M}{T}$  seien ( $u, v, w$  Geschwindigkeitskomponenten,  $M$  eine gewisse Zahl); in diesem Falle ist es oft bequem, den Grenzübergang  $T \rightarrow 0$  durchzuführen; da dieselbe Methode in anderen Gebieten der Schwingungstheorie anwendbar ist, ist es vorteilhaft, nicht jedesmal diesen Grenzübergang auszuführen, sondern von vornherein solche asymptotische Formeln aufzustellen, die man dann nur auf die gegebenen Fälle anzuwenden braucht. Verf. gibt einige solche Formeln und weist auf einige ihrer Anwendungen hin. *A. Andronow und A. Witt* (Moskau).

**Dölling, Georg:** Über ein hydrodynamisches Problem. Leipzig: Diss. 1934. 27 S.

Gegeben sei ein starrer gravitierender Körper  $\mathfrak{Z}$  (Rand  $\mathfrak{S}$ ), der um eine im Raume ruhende Achse rotiert. Wir betrachten eine Niveauläche des Gesamtpotentials der Attraktions- und Zentrifugalkräfte, die teils innerhalb, teils außerhalb von  $\mathfrak{Z}$  verläuft. Ein außerhalb liegendes Stück heiße  $S_0$ .  $S_0$  und  $\mathfrak{S}$  sollen einander nicht berühren. Nun läßt sich, wie Lichtenstein zeigte, in der Nachbarschaft von  $S_0$  ein wie  $S_0$  beschaffenes Flächenstück  $S$  angeben derart, daß  $\mathfrak{Z}$  und eine Flüssigkeitsmasse hinreichend kleiner Dichte, die das von  $S$  und einem Teile von  $\mathfrak{S}$  begrenzte Gebiet erfüllt, eine Gleichgewichtskonfiguration ergeben (freie Oberfläche des Ozeans) [Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig **79**, 197 ff. (1927); Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Berlin 1933, 83 ff.; dies. Zbl. **7**, 181—182]. Da im allgemeinen die Hauptträgheitsachsen von  $\mathfrak{Z}$  und die der gesuchten Konfiguration nicht zusammenfallen, stellt die von Lichtenstein angegebene Massenverteilung ein System dar, das sich nur nach Hinzufügen geeigneter Außenkräfte im relativen Gleichgewicht befinden wird. Verf. läßt im Gegensatz dazu die gesuchte Konfiguration um eine Gerade ( $h$ ) frei rotieren, die sich in der Nachbarschaft der ursprünglichen Rotationsachse befindet; ( $h$ ) ist somit eine der Hauptträgheitsachsen. Neben  $S$  muß daher jetzt noch ( $h$ ) bestimmt werden, was durch Einführung geeigneter sukzessiver Approximationen gelingt. *Maruhn.*

**Maruhn, Karl:** Über zwei Gleichgewichtsfiguren rotierender inhomogener Flüssigkeit. *Math. Z.* **39**, 244—262 (1934).

Der von Lichtenstein [*Math. Z.* **10**, 130—159 (1921) und **13**, 82—118 (1922)] gegebene Existenzbeweis für die von Laplace postulierte Mondfigur und für die von Poincaré postulierte Ringfigur wird mittels der von Lichtenstein [*Math. Z.* **36**, 481—562 (1933); dies. *Zbl.* **6**, 373—374; vgl. auch Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Berlin 1933; dies. *Zbl.* **7**, 181—182] entwickelten Methoden auf gewisse Fälle mit konstanter Dichte übertragen. Wintner (Baltimore).

## Astronomie und Astrophysik.

**Mascart, Jean:** Sur le groupement des périhélie planétaires. *C. R. Acad. Sci., Paris* **199**, 772—774 (1934).

**Nölke, F.:** Einfache Herleitung der Gleichungen für die Störungen 1. Ordnung. *Astron. Nachr.* **253**, 253—258 (1934).

● **Meurers, J.:** Die allgemeinen Beziehungen zwischen der Leuchtkraft, der Masse und der effektiven Temperatur der Sterne. (Veröff. d. Univ.-Sternwarte zu Bonn. Hrsg. v. Arnold Kohlschütter. Nr. 28.) Berlin u. Bonn: Ferd. Dümmler 1934. 51 S. RM. 5.—.

In der Theorie des Sterninnern herrscht noch Unsicherheit über die Art der Verteilung der Energiequellen im Stern. Dementsprechend herrscht auch bis zu einem gewissen Grad Unsicherheit über den inneren Aufbau der Sterne. Verf. schlägt den folgenden Weg ein. Das Beobachtungsmaterial, wie es in der Form des Masse-Leuchtkraft-Diagramms und des Russell-Diagramms vorliegt, wird zugrunde gelegt, und es wird versucht, daraus Schlüsse zu ziehen, ohne auf die speziellen Eigenschaften der Sternmaterie, die durch Zustandsgleichung, Absorptionskoeffizient und Energieproduktion charakterisiert werden, einzugehen, allein auf Grund der allgemeinen Eddingtonschen Gleichgewichtsbedingungen. Von diesem Standpunkt aus werden auch Fragen aus der Theorie der Entwicklungsgeschichte der Sterne erörtert.

*Bengt Strömgren (Kopenhagen).*

**Kalmár, L. v.:** Gleichgewicht einer Gaskugel bei veränderlichem  $n$ . *Astron. Nachr.* **253**, 365—368 (1934).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (vgl. dies. *Zbl.* **9**, 237) behandelt Verf. die Bedingung für mechanisches Gleichgewicht unter Annahme eines veränderlichen Polytropenindex  $n$ . Durch Einführung des Strahlungsdruckes und eines geeigneten Ansatzes für den Absorptionskoeffizienten läßt sich  $n$  aus der Gleichgewichtsbedingung eliminieren. Diese nimmt dadurch die Form einer Diff.-Gleichung 3. Ordnung an, die sich jedoch auf eine 2. Ordnung transformieren läßt. Hiervon gibt Verf. eine singuläre Lösung an. *Klarnder (Jena).*

**Ganguli, A., and P. Mitra:** Transport phenomena in degenerate gases and their bearing on white dwarfs. *Indian J. Physics a. Proc. Indian Assoc. Sci.* **9**, 81—89 (1934).

The authors apply the methods of Maxwell and of Chapman to calculate the viscosity, conductivity, and diffusion coefficients for a degenerate gas in which the law of force between the particles is the inverse fifth power law or the inverse square law. In the latter case they follow Persico [*Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **86**, 93 (1926)] in using a Debye-Hückel charge distribution, instead of point charges. They tabulate numerical values of the various coefficients for assumed conditions in the central regions of the white dwarf stars  $\epsilon_2$  Eridani and Sirius B. *W. H. McCrea (London).*

**Tierey, Georges:** Sur la relation entre la loi d'assombrissement et la distribution de température à l'intérieur d'une étoile. *Arch. Sci. Physiques etc.* **16**, 69—79 (1934).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit des Verf. (*Publ. Observ. Genève*, fasc. 26) wird der Zusammenhang zwischen dem Randverdunkelungsgesetz und der Temperaturverteilung im Sterninnern untersucht, wobei unter dem „Sterninnern“ die Schichten von  $\frac{3}{4}$  des Sternradius bis zur Oberfläche verstanden werden, in denen die polytrope



Näherung nicht gültig ist. Das gleiche Problem ist zwar schon von Milne (Philos. Trans. Roy. Soc. London **223 A**) und Lindblad (Astrophys. J. **58**) behandelt worden, doch verwenden diese für die schwarze Strahlung  $B$  als Funktion der optischen Tiefe  $\tau$  eine Reihenentwicklung, deren Anwendbarkeit fraglich ist. Deshalb behandelt Verf. die Frage von neuem unter Vermeidung obiger Unsicherheit. Er gelangt dabei zu einer ziemlich allgemeinen Näherungslösung für die Funktion  $B$  und die Temperaturverteilung in Abhängigkeit von der optischen Tiefe und vom Verdunklungsfaktor.

Klauder (Jena).

**Takeda, Shin-ichiro:** Distorted out layers of the stars. Mem. Coll. Sci. Kyoto A **17**, 197—217 (1934).

Chandrasekhar has studied the equilibrium of rotating stars and double stars by treating them as distorted polytropes [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **93**, 390, 449, 462, 539 (1933); this Zbl. **7**, 39, 134, 264]. The present author carries the work to higher approximations for the outer layers of the star by supposing them in equilibrium under the gravitational attraction of the nucleus alone, i. e. neglecting their own gravitational effects. He supposes the polytropic law  $P = K\rho^{4/3}$  obeyed throughout and treats the nucleus as a polytrope of index  $n = 3$ , taking the interface as a "level" surface and making the pressure and pressure gradient continuous there (extended Roche model). Numerical values for the oblateness and equatorial elongation of the outer boundary are tabulated and graphed for different selections of the position of the interface. They show considerable differences from Chandrasekhar's polytropes for sufficiently large values of the speed of rotation, though the differences for the inner regions are small. The work is then extended to the binary problem, and in particular the characteristics of the equatorial section of one component at the critical point are tabulated for different values of the mass ratio. The results are applied to calculate the behaviour of the light curve of the model stars considered, taking into account the distortion, the darkening towards the limb, and the reflexion effect in binaries. Use is made of known theorems due to Milne, von Zeipel, and Jeans. It is found that the reflexion effect is predominant for the component whose mass is a little less than that of the other. The deformation effect is compared with Shapley's observational data on eclipsing binaries, and the agreement is regarded as satisfactory.

W. H. McCrea (London).

**Nobile, V.:** Sulla utilizzazione delle determinazioni spettroscopiche delle velocità radiali nello studio del moto perturbato dei sistemi stellari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 682—688 (1934).

The paper gives a discussion of how measurements of radial velocities (from observations of Doppler shifts) can be utilized for the study of the dynamics of stellar systems. [See also a previous paper by the same author in Mem. Soc. astron. Ital. **III**, n. 4 (1926)].

Steensholt (Cambridge).

**Lundmark, Knut:** On the formation of metagalactic clusters and the spatial arrangement and age of the metagalactic system. Lund Observ. Circ. Nr **9**, 219—234 (1934).

Aus der Abschätzung, daß im metagalaktischen System unter insgesamt  $1,5 \cdot 10^7$  Objekten bei einer Relativgeschwindigkeit von 300 km/sec in je 3500 Jahren ein Zusammenstoß erfolgt (also jeder Nebel selbst bei einer unteren Altersgrenze von  $10^{10}$  Jahren mehrere Stöße erfährt), wird geschlossen, daß Nebelhaufen mit einer beobachteten Höchstzahl von  $10^3$  Gliedern schon in  $10^6$  bis  $10^7$  Jahren durch Zusammenstöße gebildet sein könnten. Aus der Verminderung des gegenseitigen Abstandes der Nebel vom etwa 30fachen ihres Durchmessers bei regelloser Verteilung am Himmel auf den 6fachen (zu  $3 \cdot 10^4$  Lichtjahren angenommenen) Durchmesser in Nebelhaufen wird für das Alter der Haufen die Größenordnung  $10^8$  bis  $10^9$  Jahre geschätzt. — Die Ableitung der räumlichen Dichteverteilung im metagalaktischen System nach den bekannten stellarstatistischen Methoden scheitert vorläufig an der unzulänglichen Kenntnis von Helligkeiten und Durchmessern der Nebel.

Wempe (Göttingen).

## Relativitätstheorie.

**Sulaiman, Shah:** The mathematical theory of a new relativity. Proc. Acad. Sci. U. P. India 4, 1—36 (1934).

**Mercier, André:** Application des nombres de Clifford à l'établissement du théorème de relativité de Lorentz. [Schweiz. Physikal. Ges., Zürich, Sitzg. v. 7.—8. IX. 1934.] Helv. physica Acta 7, 649—650 (1934).

**Baumgardt, Ludwig:** Über die Verallgemeinerung des Michelson-Versuches. Z. Physik 90, 327—330 (1934).

Legt man beim Michelsonversuch die Lichtwege in ein Medium, dessen Brechungsindex höher als 1 ist, so wird er zu einem Experimentum crucis für die absolut-theoretische Deutung der Lorentztransformation, die für diesen Fall Streifenverschiebungen erwarten läßt. Denn nun hängen die Lichtzeiten von  $\frac{c}{n}$  ab, die Lorentzkontraktion aber ist von  $n$  unabhängig. Numerische Abschätzungen. Heckmann (Göttingen).

**Glaser, Walter:** Stationäre Trägheitsfelder in beschleunigten Bezugssystemen. Z. Physik 91, 169—183 (1934).

If a system of reference  $K$  has an accelerated motion relative to an inertial system  $K_0$ , then the "fictitious" gravitational field of  $K$  in general varies with time. The author seeks the most general system  $K$  for which the fictitious gravitational field is constant with time, and finds it to be a cartesian system which rotates about an axis with uniform angular velocity, and moves along that axis with uniform acceleration relative to  $K_0$ .

H. S. Ruse (Edinburgh).

**Kearney, R. A. M.:** Results of relativity without the theory of tensors. Math. Gaz. 18, 145—164 (1934).

Suppose a quasi-euclidean map [(distance)<sup>2</sup> =  $T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2$ ] to be made of the space-time of special relativity. If  $u$  is the velocity of one particle relative to another, then the "hyperbolic angle"  $\theta = \operatorname{argtanh} u$  is called (after Robb) the "rapidity" of the particle. Rapidities, unlike relative velocities, are additive. A curve in the space-time map represents an accelerated particle, and the acceleration may be defined in terms of the "hyperbolic curvature"; the acceleration is, in fact, the hyperbolic angle through which the path turns per unit of its length. The world-lines of points of a uniformly accelerated rigid body are concentric and co-asymptotic hyperbolas. In a diagrammatic representation of space-time in which these hyperbolas appear as straight lines, the world-lines of unaccelerated particles appear as curves and a simulation of a gravitational field is thus obtained. But a proper representation of a true gravitational field requires the assumption that space-time has an inherent curvature of its own. — Starting with these ideas, the author develops a relativistic theory of motion in a central field of force, accelerations being defined in terms of curvatures. The law of gravitation appears as an extension of Laplace's Equation. The last three sections of the paper are concerned with the Doppler Effect, the deflection of light and planetary motion, the results obtained agreeing with those of general relativity.

H. S. Ruse (Edinburgh).

**Tolman, Richard C.:** Suggestions as to the energy-momentum principle in a non-conservative mechanics. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 20, 437—439 (1934).

Da nach Bohr die Erhaltung von Energie und Impuls in radioaktiven Prozessen vielleicht nicht gewahrt ist, wird auch das makroskopische Geschehen evtl. durch eine nichtkonservative Mechanik zu beschreiben sein. Es wird vorgeschlagen, statt  $T_{\nu}^{\mu\nu} = 0$  die Gleichungen  $T_{(\nu)}^{\mu\nu} = b_0 \frac{dx^\mu}{ds}$  zu verwenden, wo  $b_0$  den Betrag der Energieerzeugung pro Volumen- und Zeiteinheit für einen relativ zur betrachteten Materie ruhenden Beobachter darstellt,  $\frac{dx^\mu}{ds}$  aber die makroskopische Strömung dieser Materie im benutzten Koordinatensystem ist.

Heckmann (Göttingen).



**Tolman, Richard C.:** Suggestions as to metric in a non-conservative mechanics. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **20**, 439—444 (1934).

Spekulative Betrachtungen darüber, wie die Feldgleichungen der Gravitation abzuändern seien, wenn man keine Erhaltungssätze für die Materie postuliert. *Heckmann.*

**Gargia, G.:** Leggi del movimento planetario einsteiniano. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 874—879 (1934).

In this paper the author studies relativistic motion in a central field of force, basing his work on Levi-Civita's theorem of mechanical equivalence (Absolute Differential Calculus, Glasgow 1927, page 395), and using the Hamilton-Jacobi partial differential equation. He obtains an approximate formula for the motion of perihelion, and re-establishes the law of areas previously given by Cimino (this Zbl. **5**, 270).

*H. S. Ruse* (Edinburgh).

**Walker, A. G.:** Distance in an expanding universe. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **94**, 159—167 (1933).

Angabe eines Ausdruckes für die „Entfernung“ eines Sternes in einer expandierenden Welt, der (prinzipiell) geeignet erscheint, aus der (beobachteten) Korrelation zwischen Radialgeschwindigkeit und Entfernung außergalaktischer Nebel eine Entscheidung über das Vorzeichen der Raumkrümmung und die Größe der kosmischen Konstanten  $\lambda$  zu fällen.

*Heckmann* (Göttingen).

**Polvani, G., B. Finzi ed E. Bianchi:** Velocità della luce ed espansione dell'universo. Rend. Semin. mat. fis. Milano **7**, 397—432 (1933).

Im 1. Teil des Berichtes (Polvani) wird eingehend die Frage der möglichen säkularen Veränderlichkeit der Lichtgeschwindigkeit ( $V$ ) diskutiert an Hand der bisher vorliegenden Messungen. Danach scheint eine geringe säkulare Abnahme zu existieren; zu einer definitiven Aussage reicht das benutzte Material noch nicht aus. Nicht berücksichtigt sind hierbei die letzten amerikanischen Messungen (seit Dezember 1933), die auf eine jährliche Abnahme von 4 km/sec zu deuten scheinen und anhangsweise erwähnt werden. — Der 2. Teil (Finzi) enthält einen kurzen Abriß der wichtigsten Lösungen der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie, wobei jeweils das sich ergebende  $V$  berechnet wird (es ist  $g_{44} = V^2/c^2$ , wobei  $c$  eine Konstante ist). — Der 3. astronomische Teil (Bianchi) enthält einen kurzen Bericht über die beiden astronomischen Methoden zur Bestimmung von  $V$  und die Diskrepanz zwischen Parallaxe und Aberrationskonstante. Material über Radialgeschwindigkeiten extragalaktischer Objekte ist angefüllt.

*S. Flügge* (Frankfurt a. M.).

**Schouten, J. A., und J. Haantjes:** Generelle Feldtheorie. VIII. Autogeodätische Linien und Weltlinien. Z. Physik **89**, 357—369 (1934).

Verff. bezeichnen die in den vorigen Arbeiten über „Generelle Feldtheorie“ sowie in den Arbeiten von Veblen und Hoffmann und von Pauli verwendeten geodätischen Linien, die durch eine Quadrik „induziert“ werden, als induziertgeodätisch und die aus der projektiven Deutung der fünfdimensionalen Riemannschen Geometrie hervorgehenden als autogeodätisch. Es wird vorgeschlagen, die autogeodätischen Linien an Stelle der induziertgeodätischen als Weltlinien aufzufassen. Unter dieser Annahme wird die Vereinbarkeit verschiedener Forderungen (1. Symmetrie der Parallelübertragung, 2. Impulsvektor  $= m\dot{v} + \frac{e}{c}p^\nu + \text{Gradient}$ , 3. Signatur der Quadrik — — — — +, 4. Abwesenheit der Zusatzglieder in den Maxwell'schen Gleichungen usw.) besprochen. Die verschiedenen möglichen Theorien werden durch zwei Konstanten  $p, q$  charakterisiert. Es erweist sich, daß die Forderungen 1., 2., 3. miteinander, nicht aber mit 4. in Einklang gebracht werden können. (VII. vgl. dies. Zbl. **7**, 233.)

*V. Fock* (Leningrad).

**Novobatzky, Karl:** Universelle Feldtheorie. Z. Physik **89**, 373—387 (1934).

In Anlehnung an projektiv-geometrische Überlegungen anderer Autoren, aber unter Benutzung des Bildes der Einstein-Mayer'schen Fünfervektoren wird eine ein-

heitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität erstrebt. Durch geeignete Spezialisierung der in einer metrischen Übertragung neben der Translation enthaltenen Drehung wird zunächst ein antisymmetrischer Tensor  $F_{ik}$  gewonnen. Die Feldgleichungen werden aus einem Variationsprinzip erhalten, dessen Wirkungsfunktion gleich der invarianten Projektivkrümmung gewählt wird. Dadurch wird eine Darstellung der Übertragungsparameter erzwungen, die im weiteren Verlauf zu physikalisch deutbaren Größen führt. Neben dem Feldtensor  $F_{ik}$  des elektromagnetischen Feldes ergibt sich ein Ladungsstrom und ein Gradientenvektor, der selbst dann noch Energie-Impuls-Träger bleibt, wenn elektromagnetisches Feld und Ladungen verschwinden, der also elektrisch neutraler, gravitierender Materie entspricht. *Heckmann* (Göttingen).

**Novobatzky, Karl: Universelle Feldtheorie.** Z. Physik **89**, 750—756 (1934).

Die vom Verf. in der Z. Physik **89**, 373 (1934) (vgl. vorst. Referat) gegebene Feldtheorie beschreibt das Verhalten von elektrisch neutraler gravitierender Materie durch Feldgleichungen, die in der vorliegenden Arbeit unter zwei Gesichtspunkten betrachtet werden: 1. werden sie gelöst unter Zugrundelegung des Friedmann-Lemaître-schen Linienelements eines sich zeitlich ausdehnenden isotropen Raumes; 2. wird gezeigt, daß die charakteristische Feldgröße der Theorie, wenn man die von ihr mitgeführte Energie quantelt, geeignet erscheint zur Beschreibung des Neutrinos, für das sich die Ruhmasse Null ergibt. *Heckmann* (Göttingen).

## Quantentheorie.

**Frenkel, J.: On Born's theory of the electron.** Proc. Roy. Soc. London A **146**, 930 bis 934 (1934).

Die Born-Infeldschen Resultate betreffs der Ruhmasse des Elektrons in der Bornschen Theorie und betreffs der Einwirkung der Feldstärken auf das Elektron erlauben eine sehr elegante und bemerkenswerte neue Ableitung, wenn man vom fundamentalen Lagrange-Prinzip der Bornschen Theorie ausgeht, statt von seiner Umformung in ein Hamilton-Prinzip. *P. Jordan* (Rostock).

**Born, M., and L. Infeld: Remarks on the paper by Frenkel on Born's theory of the electron.** Proc. Roy. Soc. London **146**, 935 (1934).

Gegenüber der modifizierten Deduktion, die Frenkel für die Ruhmasse des Elektrons in der Bornschen Theorie gegeben hat, betonen die Verff., daß auch die von ihnen gebrauchte Methode korrekt ist und zu denselben Resultaten führt wie die Frenkelsche. (Vgl. vorst. Referat.) *P. Jordan* (Rostock).

**Destouches, Jean-Louis: Axiomatique de la théorie des photons de M. Louis de Broglie et superquantification.** C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 779—781 (1934).

Formale Einordnung der de Broglieschen Gleichung für Photonen in die „Abstrakte Wellenmechanik“ des Verf. (vgl. dies. Zbl. **9**, 380). *Willy Feller*.

**Heisenberg, W.: Über die mit der Entstehung von Materie aus Strahlung verknüpften Ladungsschwankungen.** Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig **86**, 317—322 (1934).

Verf. berechnet die Schwankungen der Ladung in einem Teilvolumen  $v$  eines großen Volumens  $V$ , wenn im letzteren die Anzahl der Elektronen konstant ist. Es zeigt sich, daß auf Grund der Diracschen „Löcher“-Theorie der Positronen diese Schwankungen viel größer als die statistischen Schwankungen sind. Sie sind sogar bei scharf begrenztem Teilvolum  $v$  unendlich. Verf. führt diese Schwankung auf die bei der zur Messung notwendigen Abgrenzung des Volums  $v$  entstehenden Elektronenpaare zurück. *V. Weisskopf* (Zürich).

**Sevin, Émile: Sur le jeu des ondes, du spin et des nombres.** C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 702—704 (1934).

Describes the author's conception of the hydrogen atom based on his previous theory of waves and particles (this Zbl. **8**, 422). *W. H. McCrea* (London).



**Weisskopf, V.: Berichtigung zu der Arbeit: Über die Selbstenergie des Elektrons.** Z. Physik **90**, 817—818 (1934).

Entgegen einem früher publizierten Ergebnis (vgl. dies. Zbl. **9**, 185) wird festgestellt, daß nach der Diracschen Theorie des positiven Elektrons sowohl die magnetische wie die elektrische Selbstenergie des Elektrons nur logarithmisch unendlich wird, d. h. also viel schwächer als nach der früheren Theorie. *Peierls* (Manchester).

**Posthumus, K.: Magnetron oscillations of a new type.** Nature **134**, 699 (1934).

**Darrow, Karl K.: Contemporary advances in physics. XXVIII: The nucleus. III.** Bell Syst. Techn. J. **13**, 580—613 (1934).

**Margenau, Henry: Nuclear energy levels and the model of a potential hole.** Physic. Rev., **II** s. **46**, 613—615 (1934).

Die Energiewerte eines Teilchens in einem kugelsymmetrischen rechteckigen Potentialloch von endlicher Tiefe werden berechnet. Gamow [Nature **131**, 433 (1933); Solvay-Bericht 1933] hatte versucht, die angeregten Zustände eines  $\alpha$ -Teilchens im Kern aus einem derartigen Modell zu bestimmen. Verf. zeigt, daß weder das von ihm durchgerechnete noch auch irgendein aus diesem durch Abschragen der Wände hervorgehendes Potential gleichzeitig das empirische Niveauschema von RaC' und die richtige Größenordnung für den Kernradius liefern kann. Er hält es damit für erwiesen, daß die Behandlung des Problems als Einkörperproblem inkorrekt ist. Nicht berücksichtigt werden dabei aber Potentiale, die im Innern des Kerns wieder ansteigen („Krater mit Aschenkegel“; vgl. W. Heisenberg, Solvay-Bericht 1933), sowie die Möglichkeit, die Terme von RaC' als angeregte Zustände eines Protons zu deuten (Gamow, Solvay-Bericht und anschließende Diskussion).

*C. F. v. Weizsäcker* (Leipzig).

**Saïni, Hugo: Théorie de Gamow et radioactivité.** Arch. Sci. Physiques etc. **16**, 80—101 (1934).

Bericht über die wellenmechanische Theorie des  $\alpha$ -Zerfalls und der Kernzertrümmerung.

*C. F. v. Weizsäcker* (Leipzig).

**Guéhen, G.: Nuclear structure and excited radioactivity.** Nature **134**, 626 (1934).

Verf. charakterisiert jeden stabilen Kern durch drei Zahlen — Zahl der  $\alpha$ -Teilchen, Deutonen (0 oder 1) und Neutronen, aus denen er zusammengesetzt werden kann, formuliert die wichtigsten Stabilitätsregeln als Bedingungen für diese Zahlen und zeigt, wie aus diesen Regeln die Grundphänomene der induzierten Radioaktivität abgeleitet werden können.

*C. F. v. Weizsäcker* (Leipzig).

**Bhabha, H. J., and H. R. Hulme: The annihilation of fast positrons by electrons in the K-shell.** Proc. Roy. Soc. London A **146**, 723—736 (1934).

Es wird die Übergangswahrscheinlichkeit eines K-Elektrons zu einem Zustand negativer Energie unter Ausstrahlung eines Lichtquants berechnet. Für den Zustand negativer Energie wird die Lösung der Diracschen Wellengleichung im Coulombfeld verwendet. Die Auswertung gelingt aber nur unter der Annahme, daß  $Z \ll 137$  und  $|E| \geq 2 mc^2$ . Nach der Diracschen Theorie des Positrons entspricht die so berechnete Übergangswahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeit für die gegenseitige Vernichtung eines K-Elektrons und eines positiven Elektrons. Es zeigt sich, daß die Vernichtung unter Ausstrahlung eines Lichtquants immer viel unwahrscheinlicher ist als die Vernichtung unter Ausstrahlung zweier Quanten.

*Casimir* (Leiden).

**Fano, U.: Sul calcolo dei termini ottici, e in particolare dei potenziali di ionizzazione dei metalli bivalenti, per mezzo del potenziale statistico di Fermi.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., **VI** s. **20**, 35—39 (1934).

Verbesserung der Fermischen Methode zur näherungsweise Berechnung der Eigenfunktionen und Energiewerte von Atomen. In dieser Methode war die Ladungsdichte der  $Z - 1$  Rumpfelektronen in einem Atom von der Ordnungszahl  $Z$  durch die Ladungsverteilung im Atom  $Z - 1$  ersetzt worden. Die erste Verbesserung besteht darin, statt dessen von der statistischen Behandlung des einfach ionisierten Atoms  $Z$  auszugehen.

Weiterhin wird für die Erdalkalien die ungleiche Behandlung der beiden äußeren Elektronen (von denen eines zum Rumpf gezählt, für das andere aber die Wellengleichung gelöst wird) durch eine nachträgliche Störungsrechnung kompensiert. Beide Verbesserungen führen zu einer merklichen Verminderung der Abweichung zwischen experimentellen und theoretischen Werten für die Ionisierungsspannung und die Rydbergkorrektur der  $s$ -Terme.

R. Peierls (Manchester).

**Mattauch, J.:** Zur Systematik der Isotopen. *Z. Physik* **91**, 361–371 (1934).

Für die Möglichkeit stabiler Kerne stellt der Verf. die folgende empirische Auswahlregel auf: es gibt keine Isobaren zu den Isotopen ungerader Elemente, und es gibt keine Isobaren ungerader Massenzahl. Berücksichtigt man, daß es (oberhalb  $^{14}_7\text{N}$ ) keine stabilen Kerne gerader Masse, aber ungerader Ladung gibt, so folgt der erste Teil der Regel aus dem zweiten. Die Regel besagt insbesondere, daß stabile Isobaren, die sich nur um eine Elementarladung unterscheiden, nicht vorkommen. In einem Anhang weist G. Beck darauf hin, daß in der Tat von zwei solchen Kernen, wenn ihre Massen sich nicht zufällig um weniger als die Summe der Massen eines Elektrons und eines Neutrinos unterscheiden, stets der schwerere unter Aussendung eines positiven oder negativen Elektrons in den leichteren übergehen könnte. — Der Verf. gibt experimentelle Gründe dafür an, daß die heute bekannten Ausnahmen von seiner Regel nicht als gesichert angesehen werden können. Er bemerkt, daß die außerordentliche Seltenheit der Elemente 43 und 61 damit zusammenhängen könnte, daß die bekannten Isotopen ihrer Nachbar Elemente für sie nach der Auswahlregel keinen freien Platz im Isotopenschema übriglassen.

C. F. v. Weizsäcker (Leipzig).

**Breit, G., and I. S. Lowen:** Radiation damping and the polarization of fluorescence radiation. *Physic. Rev.*, II. s. **46**, 590–597 (1934).

Verf. untersucht die Störungen, die auftreten, wenn der Frequenzabstand zwischen den Atomniveaus von der Größenordnung der natürlichen Linienbreite wird. Das Strahlungsfeld ruft dann eine Kopplung zwischen ihnen hervor, die durch eine „Dämpfungskonstanten-Matrix“ bestimmt ist. Diese Matrix bestimmt eine gewisse Linearkombination aus den benachbarten Termen, die die Eigenschaft hat, daß für sie die „Dämpfungskonstanten-Matrix“ diagonal ist, was bedeutet, daß die so gewählten Linearkombinationen voneinander trotz Strahlungskopplung unabhängig sind. Diese Betrachtungen werden angewendet auf die Berechnung der Polarisation der Resonanzfluoreszenz, die wesentlich vom Kopplungszustand der oberen Terme abhängig ist. Als Beispiel wird die Resonanzfluoreszenz an einem Wasserstoffatom behandelt, dessen Terme durch ein schwaches elektrisches Feld aufgespalten sind.

V. Weisskopf.

**Vleck, J. H. van:** Magnetic dipole radiation and the atmospheric absorption bands of oxygen. *Astrophys. J.* **80**, 161–170 (1934).

The paper gives a discussion of the interpretation of the atmospheric absorption bands of oxygen. The author concludes that these bands can be best interpreted as magnetic dipole radiation rather than as ordinary dipole or quadrupole radiation. Arguments in favour of this interpretation are advanced; thus, on the assumption of magnetic dipole radiation, the upper state can be  $^1\Sigma_g^+$ , as required by configuration theory, and one can still apply the intensity formulae of Schlapp, which are in agreement with experiment. Also, certain estimates of Childs and Mecke of absolute intensities give further evidence in support of the magnetic dipole hypothesis. — The paper further gives some general considerations concerning the role of magnetic dipole radiation in molecular spectra. Thus it is pointed out, that certain satellite bands in OH, which contradict the usual selection rules, can be easily explained as due to this type of radiation. Further, intensity formulae are derived for the oxygen band  $^2\Sigma - ^1\Delta$  (about 12600 Å), which is also due to magnetic dipole radiation.

Steensholt.

**Nath, N. S. Nagendra:** The normal vibrations of molecules having tetrahedral symmetry. *Indian J. Physics a. Proc. Indian Assoc. Sci.* **8**, 581–592 (1934).

Der Verf. versucht die Kraftkonstanten in einem Tetraedermolekül  $AB_4$  aus den



experimentell bekannten Frequenzen der Normalschwingungen zu berechnen. Er macht zunächst einen Ansatz für das Potential mit drei verfügbaren Konstanten. Diese werden so angenommen, daß von den vier Normalfrequenzen die drei höheren mit dem Experiment übereinstimmen. Für die niedrigste Frequenz ergeben sich dann Fehler in der Größenordnung von 15%. Deshalb wird noch eine vierte verfügbare Konstante in den Potentialansatz eingeführt. Der Verf. schreibt den Konstanten in seinem Ansatz eine physikalische Bedeutung zu.

*E. Teller (London).*

**Mulliken, Robert S.: The halogen molecules and their spectra. J-J-like coupling. Molecular ionization potentials.** *Physic. Rev.*, II. s. 46, 549—571 (1934).

Es wird die Frage untersucht, wie die Ablösungsarbeiten der einzelnen Elektronen eines Atoms durch Bindung im Molekül verändert werden. Für nichtbindende (innere) Elektronen wird man im Molekül im wesentlichen dieselben Werte erwarten wie im Atom, dagegen für bindende Elektronen größere, für lockernde kleinere Werte. Auf die Definition der Ionisationsenergie im Molekül wird näher eingegangen, vor allem was den Einfluß des Kernabstands betrifft. Die allgemeinen Betrachtungen werden zunächst an den Spektren gut bekannter Moleküle geprüft und dann sehr ausführlich auf die Halogenmoleküle angewandt. Verf. kommt so zur Vorhersage einer Reihe neuer angeregter Zustände dieser Moleküle und zu einer Deutung ihrer Absorptionspektren, die sich ins Vakuumultraviolett erstrecken.

*R. de L. Kronig.*

● **Calcegni, Gennaro: Struttura dell'atomo e legami chimici.** Genova: A. Badioli 1934. 62 S. L. 10.—

**Bomke, Hans: Über die Natur der metallischen Bindung.** *Z. Physik* 91, 400—409 (1934).

Quantitative Diskussion näherungsweise Beziehungen zwischen den empirischen Konstanten von Metallen.

*R. Peierls (Manchester).*

**Mitchell, K.: The theory of the surface photoelectric effect in metals. I.** *Proc. Roy. Soc. London A* 146, 442—464 (1934).

Die bisherigen Berechnungen des Photoeffektes werden als falsch nachgewiesen: Fröhlich sowie Sommerfeld und Bethe berechneten den Effekt an einer Metallplatte von endlicher Dicke und erhielten daher die an der hinteren Oberfläche der Platte ausgelösten Elektronen mit hinein, welche in Wirklichkeit nicht auf die Vorderseite gelangen und dort austreten können. Tamm und Schubin rechneten korrekt mit einem nur einseitig begrenzten Metall, machten jedoch einen formalen Fehler bei der Auswertung der Matrixelemente. Das korrekte Resultat von Mitchell ist allerdings nur wenig von den früheren verschieden. — Verf. weist noch darauf hin, daß die Brechung und Reflexion der Lichtwelle an der Metalloberfläche berücksichtigt werden muß.

*Bethe (Bristol).*

**Warren, B. E., and N. S. Gingrich: Fourier integral analysis of X-ray powder patterns.** *Physic. Rev.*, II. s. 46, 368—372 (1934).

**Patterson, A. L.: A Fourier series method for the determination of the components of interatomic distances in crystals.** *Physic. Rev.*, II. s. 46, 372—376 (1934).

In vielen Fällen will man aus der Beugung der Röntgenstrahlen an einem Körper nicht eine Kenntnis der gesamten Anordnung der Atome gewinnen, sondern nur einiger wichtiger Züge davon. Hierfür werden einfache Methoden angegeben: von Warren und Gingrich zur Auffindung der Häufigkeitskurve für die radiale Verteilung der Atome um ein Atom herum (bei Flüssigkeiten fragt man ja zuerst danach), von Patterson für die Bestimmung einzelner Abstände.

*F. Hund (Leipzig).*

**Hayasi, Takesi: Berichtigung zu der Arbeit: „Zur Theorie der Magnetostriktion“.** *Z. Physik* 91, 818—819 (1934).

Vgl. dies. Zbl. 2, 432.

**Massey, H. S. W., and C. B. O. Mohr: The collisions of slow electrons with atoms. IV.** *Proc. Roy. Soc. London A* 146, 880—900 (1934).

Die beiden Autoren haben in einer Reihe von früheren Arbeiten die Effekte im einzelnen untersucht, die die Abweichungen von der ersten Näherung der Bornschen



Stoßtheorie (1) bedingen. Solche sind (2) der Einfluß der verdrehten (distorted) Wellen, das sind die vom ungestörten Atom abgelenkten Kugelwellen, (3) der Austausch zwischen Atomelektronen und stoßendem Elektron und (4) die Störung des Atomfeldes. Im ersten Teil der Arbeit werden mit Berücksichtigung von (2), jedoch ohne (3) und (4) die elastische und unelastische Streuung an Argon- und Neonatomen für alle Winkel und für die Spannungen 20, 40 und 80 V bzw. 26 und 60 V berechnet. Die Übereinstimmung mit dem Experiment (Nicoll und Mohr) ist qualitativ schon ziemlich vollkommen — bis auf eine Feinheit beim Neon — und auch quantitativ weitgehend. Im zweiten Teil wird auch Punkt (4) berücksichtigt. Man erhält in zweiter Näherung der Bornschen Theorie eine Wechselwirkung zwischen den elastisch und unelastisch gestreuten Materiewellen, deren Einfluß sich auch auffassen läßt als herrührend von einer Polarisierung des Atoms. Die Anwendung auf Wasserstoff und Helium (29, 83 und 205 V bzw. 75, 100, 200 und 350 V) gibt so gut wie vollkommene Übereinstimmung mit der Erfahrung. Bei der Berechnung wird der „wahre“ Polarisierungseffekt, d. h. der Effekt nach Abzug der distorted waves, nach Born, der Einfluß dieser letzteren nach Faxén und Holtsmark ermittelt. Die Autoren fassen ihre Erfahrungen über den Einfluß der verschiedenen Effekte zusammen in folgender Übersicht:

Betrachteter Prozeß.	Einfluß auf elastische Streuung.	Einfluß auf unelastische Streuung.
1. Streuung durch das ungestörte Feld des Atoms, in dem die einfallende Welle nur schwach gestört wird.	Geringe Intensität der Streuung. Winkelverteilung monoton, Intensität mit dem Winkel abnehmend.	Winkelverteilung monoton und schneller mit dem Winkel abnehmend als für elastische Streuung.
2. Verdrehung (distortion) der einfallenden und gestreuten Wellen durch das Atomfeld.	Maxima und Minima in den Wirkungsquerschnitt-Geschwindigkeits-Kurven (Ramsauer-Effekt). Maxima und Minima in den Winkelverteilungen, am ausgesprochensten für schwere Atome und verschwindend bei kleinen Stoßgeschwindigkeiten.	Kein ausgesprochener Einfluß auf die Wirkungsquerschnitt-Geschwindigkeits-Kurven. Maxima und Minima in den Winkelverteilungen bei großen Winkeln, sehr ähnlich den entsprechenden elastischen Winkelverteilungen, außer für sehr kleine Stoßgeschwindigkeiten.
3. Elektronenaustausch.	Merklich für leichte Atome (H, He) bei niederen Stoßgeschwindigkeiten durch Erzeugung größerer Variabilität der Form in den Winkelstreuungen (z. B. Helium unterhalb 20 Volt).	Führt zur Möglichkeit der Anregung optisch verbotener Übergänge (z. B. Anregung von He-Triplett). Einfluß auf Winkelverteilung noch nicht bekannt.
4. Störung des Atomfeldes (Polarisation) bzw. Einfluß der Wechselwirkung der gestreuten Wellen miteinander.	Stark vergrößerte Streuung bei kleinen Winkeln. Anwachsen der Gesamtwahrscheinlichkeit eines elastischen Stoßes.	Abnahme der Wahrscheinlichkeit eines unelastischen Stoßes. Einfluß auf Winkelverteilung noch nicht bekannt. Wessel (Jena).

**Heller, G., und H. A. Kramers: Ein klassisches Modell des Ferromagnetismus und seine nachträgliche Quantisierung im Gebiete tiefer Temperaturen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 37, 378—385 (1934).**

Die Verf. behandeln das Problem des Ferromagnetismus nach der folgenden Methode: eine große Anzahl Elementarmagnete sind bzw. in einer linearen Kette, einem quadratischen Flächengitter und einem kubischen Raumgitter angeordnet. Die Wechselwirkungsenergie besteht aus zwei Teilen; der Wechselwirkungsenergie jedes Magneten mit dem äußeren Feld, die proportional dem Kosinus des Winkels zwischen Magnet und Feldrichtung angenommen wird, und der Wechselwirkungsenergie zwischen benachbarten Magneten (von Austauschkräften herrührend), die proportional dem Kosinus des Winkels zwischen ihnen angenommen wird. Die Zustandssumme läßt sich für dies Modell im Grenzfall tiefer Temperaturen klassisch berechnen



und ergibt dann bei der Kette und beim Flächengitter für  $H \rightarrow 0$  verschwindende Magnetisierung, beim Raumgitter dagegen endliche Magnetisierung, d. h. Ferromagnetismus. Dieser erscheint also auch schon dann, wenn die Bewegung der Elementarmagnete um ihre Gleichgewichtslage noch nicht quantisiert ist. Quantisierung (Einführung von Spinwellen) begünstigt den Ferromagnetismus und bringt das Endresultat in Übereinstimmung mit früheren Ergebnissen von Bloch und Möller. *R. de L. Kronig.*

**Heitler, W., et L. Nordheim:** Sur la production des paires par des chocs de particules lourdes. *J. Physique Radium*, VII. s. 5, 449—454 (1934).

Die Wahrscheinlichkeit der Erzeugung eines Elektronenpaares durch Zusammenstoß zweier schwerer Teilchen (Massen  $M_1, M_2$ , Kernladungen  $Z_1, Z_2$ ) mit nichtrelativistischer Geschwindigkeit wird nach dem Bornschen Störungsverfahren berechnet. Wie erwartet, ergibt sich der Wirkungsquerschnitt als sehr klein gegenüber dem für Paarerzeugung durch  $\gamma$ -Strahlen, und zwar erstens wegen der großen Masse der erzeugenden Teilchen und zweitens infolge eines unerwarteten Faktors  $\left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2}\right)^2$  im Wirkungsquerschnitt, welcher für Zusammenstöße zweier schwerer Kerne fast verschwindet. — Es werden auch die Ansätze für Paarerzeugung durch Elektronen gegeben und darauf hingewiesen, daß die Matrixelemente der Wechselwirkung zwischen erzeugendem und „erzeugtem“ Elektron nicht nach der Methode von Möller berechnet werden dürfen, sondern nach der allgemeinen Methode von Bethe und Fermi, weil im Gegensatz zum einfachen Elektronenstoß Matrixelemente zwischen Zuständen verschiedener Energie benötigt werden. *Bethe (Bristol).*

## Klassische Theorie der Elektrizität.

● **Haas, Arthur:** Kleiner Grundriß der theoretischen Physik. Kleine bes. bearb. Ausgabe d. Einführung in die theoretische Physik. Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter 1934. VII, 183 S. RM. 5.30.

**Sen, R. N.:** Note on tubes of electromagnetic force. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 25, 191—196 (1934).

Whittaker has studied the electropotential and magnetopotential surfaces in a four dimensional space-time world, supposing for sake of simplicity, that the electric lines of force are everywhere perpendicular on the magnetic lines of force. The author investigates the modifications, necessary if this supposition is dropped. He arrives at a set of differential equations for the above surfaces. *M. J. O. Strutt.*

**Bailey, V. A.:** Study of the magneto-ionic theory of wave-propagation by means of conformal representation. *Philos. Mag.*, VII. s. 18, 516—523 (1934).

The author starts by quoting Appletons formulas for the refractive index, the absorption coefficient and the polarization of waves propagated in the upper atmosphere. By using a conformal transformation of the variables contained in these formulas, a simple graphical method is established for a detailed numerical study. The representation used is the well known one, transforming the rectangular coordinates in a system of confocal ellipses and hyperbolas. *M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

**Sona, L.:** Una osservazione riguardante la propagazione delle onde elettromagnetiche. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 19, 804—808 (1934).

The writer considers Maxwell's equations, together with Love's conditions for the electric and magnetic vectors at the margin of an electromagnetic wave in an isotropic medium, and reaches the conclusion that "the propagation of electromagnetic waves of either simple harmonic or damped harmonic type is impossible in the space external to any closed convex surface whatever." *M. Slow-Taylor (Slough).*

**Berndt, Walter:** Amplituden-, Abstands- und Phasenbedingungen bei Antennenkombinationen. *Hochfrequenztechn. u. Elektroakust.* 44, 23—28 (1934).

The directional characteristics of various antenna combinations are derived by



vectorial addition of the Hertzian functions for all antenna elements. Graphical use is made of the cosine curve for linear arrangements of not more than four or five antennae and for circular arrangements; in other cases the Fourier method is used. Practical hints for the design of antenna arrays are deduced. *M. Slow-Taylor* (Slough).

**Malov, N. N.: Die Berechnung der Erwärmung von zylindrischen Körpern im Kondensatorfelde.** Z. Physik **90**, 802—809 (1934).

Die Untersuchung der Erwärmung biologischer Objekte im Kondensatorfelde führt Verf. auf folgende Aufgabe: In einem homogenen quasistationären elektrischen Wechselfelde befinden sich dielektrische Zylinder, deren Achse zur Feldrichtung senkrecht ist. Die Lösung wird für einen einzigen und für zwei parallele Zylinder in der bekannten elementaren Form angegeben. Schließlich wird die Abkühlung der Objekte untersucht und ein Vergleich mit kugelförmigen Objekten angeführt.

*M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**Kohler, Max: Magnetischer Halleffekt in kristallinen Medien.** Ann. Physik, V. F. **20**, 878—890 (1934).

Es wird die Abhängigkeit des linearen magnetischen Halleffektes von der kristallographischen Orientierung des elektrischen Stromes und der magnetischen Feldstärke lediglich auf Grund der Kristallsymmetrieverhältnisse untersucht. Als Grundlage dient folgender Ansatz für die elektrische Feldstärke:

$$\mathfrak{E}_i = \sum_{k=1}^3 w_{ik} J_k + \sum_{k,l=1}^3 R_{ikl} J_k \cdot H_l \quad (i = 1, 2, 3)$$

( $J_k$  und  $H_l$ : Komponenten von elektrischer Stromdichte und magnetischer Feldstärke;  $w_{ik}$ : die Widerstandskoeffizienten des verallgemeinerten Ohmschen Gesetzes). Die Hallkoeffizienten  $R_{ikl}$  bilden danach die Komponenten eines Tensors 3. Ranges; ihre Zahl ist im allgemeinsten Fall (triklines System) 27. Die Überlegungen zeigen, wie fortschreitende Symmetrie der Kristallklassen diese Zahl der Konstanten herabsetzt. Die Ergebnisse stehen in Übereinstimmung zu verschiedenen Einkristallmessungen; insbesondere lassen sich die Versuche von H. Verleger an Wismutkristallen deuten, für die ältere auf einen spezielleren Ansatz gegründete Überlegungen von W. Voigt noch keine Deutung ergaben. *E. Vogt* (Marburg, Lahn).

**Kohler, Max: Magnetische Widerstandsänderung in kristallinen Medien.** Ann. Physik, V. F. **20**, 891—908 (1934).

Ähnlich wie in der vorst. referierten Arbeit wird untersucht, wie sich der für die magnetische Widerstandsänderung charakteristische Tensor verhält, wenn man ihn den Kristallsymmetrien unterwirft. Da allein die quadratisch von der Feldstärke abhängige Widerstandsänderung betrachtet wird, geht die Untersuchung von folgendem Ansatz aus:

$$\mathfrak{E}_i = \sum_{k=1}^3 w_{ik} J_k + \sum_{k,l,m=1}^3 R'_{iklm} J_k H_l H_m \quad (i = 1, 2, 3)$$

Für die magnetische Widerstandsänderung ist jedoch nicht der Tensor 4. Ranges  $R'_{iklm}$  in seiner vollen Allgemeinheit maßgebend, sondern es läßt sich ein Tensor abspalten, der dem quadratischen Halleffekt entspricht; übrig bleibt ein Tensor  $R_{iklm}$  mit höchstens 36 verschiedenen Komponenten. Es wird nun untersucht, wie sich diese Zahl der Konstanten bei schrittweiser Einführung der Kristallsymmetrien verringert. — Für den Vergleich mit der Erfahrung ist wesentlich die Beschränkung auf schwache Magnetfelder, und zwar auf um so schwächere, je tiefer die Temperatur ist; sonst trifft die Voraussetzung quadratischer Feldabhängigkeit der Widerstandsänderung nicht zu. Es konnten daher nur Messungen von Stierstadt an Wismutkristallen herangezogen werden, bei denen sich mehrere Aussagen der vom Verf. gegebenen Theorie bestätigen, während gewisse Ergebnisse der Messungen keine Deutung finden; sie werden jedenfalls zum Teil darauf beruhen, daß die Voraussetzung quadratischer Feldabhängigkeit auch hier nicht streng erfüllt ist. *E. Vogt* (Marburg, Lahn).